



Contributions à l'analyse des données dans l'expérience Archeops et à la mesure de la masse des neutrinos avec les expériences CMB

Alexandre Bourrachot

► To cite this version:

Alexandre Bourrachot. Contributions à l'analyse des données dans l'expérience Archeops et à la mesure de la masse des neutrinos avec les expériences CMB. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT : . tel-00007702

HAL Id: tel-00007702

<https://theses.hal.science/tel-00007702>

Submitted on 9 Dec 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

THÈSE

présentée

pour obtenir

**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY**

par

Alexandre Bourrachot

**Sujet : Contributions à l'analyse des données dans l'expérience
Archeops et à la mesure de la masse des neutrinos avec les
expériences CMB.**

soutenue le 22 septembre 2004 devant la commission d'examen :

M. Alain Benoît
M. Jean-Philippe Bernard
M. François Couchot (directeur)
M. Bernard D'Almagne
M^{me} Anne Ealet
M. Jean Kaplan
M. James Rich (rapporteur)
M. Daniel Santos (rapporteur)

Remerciements

Je suis extrêmement reconnaissant à François Couchot d'avoir accepté d'encadrer ce travail de thèse. Sa grande patience et ses encouragements ont été de précieux soutiens tout au long de ces années. Travailler avec François a été une expérience exceptionnellement formatrice.

Je remercie les directeurs successifs du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire d'Orsay, François Richard et Bernard D'Almagne, de m'avoir accueilli au sein du laboratoire. Merci à Bernard D'Almagne d'avoir également accepté la présidence de mon jury de thèse.

Je tiens à remercier Alain Benoît et François-Xavier Désert de m'avoir accueilli au sein de la collaboration Archeops. J'ai conscience d'avoir eu une chance rare de pouvoir participer à une expérience comme celle-ci. J'ai beaucoup appris au sein de la collaboration tant sur le plan scientifique qu'humain. Je remercie en particulier François-Xavier Désert, Jean-Christophe Hamilton, Juan-Francisco Macías-Pérez et Dominique Yvon pour les échanges que j'ai eus avec eux et qui ont influencé de façon décisive mon travail.

J'ai effectué ce travail au sein du groupe de cosmologie observationnelle du laboratoire. Je remercie ses membres d'avoir enrichi et rendu agréable mon long séjour doctoral. Merci, en particulier, à Sophie Henrot-Versillé, Jacques Haïssinski, Olivier Perdereau et Stéphane Plaszczyński avec qui j'ai travaillé sur l'analyse des données Archeops, ainsi qu'à Reza Ansari et Marc Moniez. Je remercie également Guy Le Meur et François Touze pour l'aide qu'ils m'ont apportée. Je tiens également à saluer Youcef Rahal et Stéphane Bargout, mes camarades doctorants, ainsi que Martin Landriau.

Je remercie James Rich et Daniel Santos d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail de thèse et d'avoir contribué à améliorer la qualité de ce manuscrit. Je remercie également Anne Ealet, Alain Benoît, Jean-Philippe Bernard et Jean Kaplan d'avoir accepté de faire partie de mon jury, ainsi que pour leurs remarques constructives.

Merci enfin à toi, Delphine, pour ton aide et ton soutien quotidiens, sans lesquels il m'aurait été bien plus difficile de réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 Éléments de cosmologie	3
1.1 Dynamique de l'Univers	3
1.1.1 L'Univers de Friedmann-Robertson-Walker	4
1.1.2 Matière et énergie dans l'Univers	7
1.1.3 Histoire thermique de l'Univers	8
1.1.4 Neutrinos	9
1.1.5 Inflation	13
1.2 Formation des structures	17
1.2.1 Spectre de puissance	18
1.2.2 Perturbations cosmologiques	20
1.2.3 Évolution des perturbations	22
1.2.4 Fonction de transfert et spectre de puissance de la matière	25
1.2.5 Matière noire chaude	26
1.3 Le rayonnement fossile de l'Univers	26
1.3.1 Origine du rayonnement fossile	27
1.3.2 Description des anisotropies	30
1.3.3 Spectre de puissance à grande échelle - Effet Sachs-Wolfe	31
1.3.4 Calcul numérique des C_l	33
1.3.5 Influence des paramètres cosmologiques sur les anisotropies du CMB	36
Bibliographie	45
Chapitre 2 Archeops	47
2.1 Mesure des anisotropies du CMB	47
2.1.1 Principe	47
2.1.2 Contraintes liées à la mesure du spectre de puissance angulaire	48
2.2 Contexte expérimental	49

2.3	Objectifs scientifiques	49
2.4	Description générale	51
2.5	Stratégie de balayage	51
2.6	Aspect instrumental	52
2.6.1	Optique froide	52
2.6.2	Bolomètres	53
2.6.3	Cryostat	55
2.7	Résultats	58
2.8	Expériences spatiales	60
2.8.1	WMAP	60
2.8.2	Planck	60
	Bibliographie	65
	Chapitre 3 Reconstruction d'attitude dans l'expérience Archeops	67
3.1	Reconstruction d'attitude	68
3.1.1	Position du problème	68
3.1.2	Le senseur stellaire	68
3.2	Stratégie	69
3.2.1	Systèmes de coordonnées	69
3.2.2	Principe de la reconstruction	70
3.3	Première estimation du pointage	71
3.3.1	Période de rotation	71
3.3.2	Phase du senseur stellaire	73
3.3.3	Algorithme d'association étoiles-signaux	76
3.3.4	Améliorations de l'estimation du pointage	77
3.3.5	Étalonnage du senseur stellaire	78
3.4	Ajustement de la trajectoire	79
3.4.1	Interpolation de la trajectoire	79
3.4.2	Ajustement couplé	80
3.4.3	Résolution	82
3.5	Résultats	82
3.5.1	Analyse des résidus	82
3.5.2	Précision de la reconstruction	83
3.5.3	Pendulation	84
3.5.4	Reconstruction du plan focal	84
3.6	Conclusion	86

Bibliographie	91
Chapitre 4 Destriage	93
4.1 Introduction	93
4.1.1 Caractéristiques des données	93
4.1.2 Fabrication de cartes	96
4.2 Destriage	98
4.2.1 Estimation de la ligne de base en masquant la Galaxie	99
4.2.2 Minimisation de la variance par pixel	103
4.2.3 Minimisation de la variance perpendiculaire à la direction de balayage . .	108
4.2.4 Destriage pour Archeops	114
4.2.5 Application aux données d'Archeops	121
4.3 Destriage par ondelettes	122
4.3.1 Propriétés des ondelettes	123
4.3.2 Ondelettes et bruit $1/f$	124
4.3.3 Destriage avec ondelettes par maximum de vraisemblance	125
4.3.4 Mise en œuvre	126
4.3.5 Efficacité du destriage en ondelettes	128
4.3.6 Développements	130
4.3.7 Application aux données d'Archeops	132
4.3.8 Ondelettes et destriages par minimisation de variances	134
4.4 Conclusion	135
Bibliographie	137
Chapitre 5 Neutrinos et CMB	139
5.1 Détermination des paramètres cosmologiques	139
5.1.1 Introduction	140
5.1.2 Statistique des estimateurs	141
5.1.3 Fonctions de vraisemblance	144
5.1.4 Critère de Fischer	149
5.1.5 Problèmes liées à l'estimation des paramètres cosmologiques	149
5.2 Utilisation des méthodes MCMC	150
5.2.1 Introduction	150
5.2.2 Méthodes MCMC	150
5.2.3 Convergence	151
5.2.4 Construction de chaînes	152
5.3 Perspectives de la mission Planck	153

5.3.1	Influence des neutrinos sur le CMB	153
5.3.2	Détermination des paramètres cosmologiques	154
5.3.3	Contraintes supplémentaires issues de l'effet de lentille	161
5.3.4	Hierarchie de masse	165
5.4	Conclusion	167
Bibliographie		169
Conclusion		171
Annexes		173
Annexe A Compléments sur les perturbations cosmologiques		173
Annexe B Senseur Stellaire		175
Annexe C Covariance des estimateurs du spectre de puissance angulaire		177
Annexe D Fonction de vraisemblance		181
Annexe E Effet de lentille gravitationnelle		183

Table des figures

1.1	Évolution de l'horizon comobile	16
1.2	Spectre de puissance de matière	19
1.3	Évolution des perturbations de densité d'énergie	25
1.4	Impact des neutrinos sur le spectre de puissance de la matière	27
1.5	Évolution de la fraction de matière ionisée	29
1.6	Exemple de fonction de Bessel	38
1.7	Influence de la courbure	39
1.8	Oscillations acoustiques dans le CMB	39
1.9	Influence de l'évolution du potentiel sur les oscillations	40
1.10	Influence des paramètres cosmologiques sur le spectre de puissance angulaire	41
1.11	Spectre de puissance angulaire	43
2.1	Spectre de puissance angulaire mesuré par différentes expériences	50
2.2	Nacelle d'Archeops	52
2.3	Trajectoire d'Archeops lors du vol scientifique KS3	53
2.4	Balayage du ciel par cercles successifs	54
2.5	Carte des redondances du vol KS3	55
2.6	Configuration optique de la chaîne de détection	56
2.7	Image d'un bolomètre de type spiderweb	57
2.8	Principe de fonctionnement d'un bolomètre	57
2.9	Coupe du cryostat d'Archeops	58
2.10	Carte CMB d'Archeops	59
2.11	Spectre C_l d'Archeops	59
2.12	Spectre C_l de WMAP	61
2.13	Satellite Planck	62
2.14	Instruments LHI et HFI	63
2.15	Précision de la mesure du spectre de puissance angulaire par Planck	64
3.1	Traces en fonction du temps	69
3.2	Système de coordonnées	70
3.3	Principe de l'algorithme de reconstruction	70
3.4	Évolution de la période de rotation	72
3.5	Distribution des différences de phase entre les signaux et les étoiles	73
3.6	Distribution des différences de phase entre les signaux et les étoiles	74
3.7	Variation du numéro de diode des signaux en fonction de la phase	75
3.8	Principe de l'algorithme d'association	76
3.9	Détermination de la direction de l'axe de rotation	77

3.10	Distribution de l'intensité du courant correspondant aux signaux et aux étoiles . . .	78
3.11	Précision de la mesure du flux	79
3.12	Biais dans la modélisation du senseur stellaire	83
3.13	Précision du pointage	85
3.14	Précision du pointage	85
3.15	Pendulation lors du vol KS3	86
3.16	Signal induit par Jupiter	87
3.17	Pic induit par Jupiter	88
3.18	Reconstruction du plan focal	88
3.19	Reconstruction complète du plan focal	89
4.1	Exemple de TOI brutes	94
4.2	Exemples de TOI issue du pipeline de traitement	95
4.3	Spectre typique d'un bolomètre	95
4.4	Effet d'une coupure basse fréquence sur les données	98
4.5	Interpolation du signal galactique	100
4.6	Réduction de l'effet de rebond par interpolation du signal galactique	101
4.7	Types de balayages	101
4.8	Réduction du rebond par interpolation de la Galaxie	102
4.9	Spectres de puissance des données et de la ligne de base des TOI à 545 GHz . . .	105
4.10	Spectres de puissance des données et de la ligne de base des TOI à 217 GHz . . .	106
4.11	Destriage par minimisation de la variance par pixel	107
4.12	Disposition des lignes parallèles et perpendiculaires au balayage	109
4.13	Matrice du système issu de la minimisation de la variance transverse	111
4.14	Destriage par minimisation de la variance transverse	112
4.15	Destriage par minimisation de la variance transverse 2	113
4.16	Spectre de TOI simulées	114
4.17	Efficacité du destriage	115
4.18	Efficacité du destriage	117
4.19	Cartes destriées	118
4.20	Biais induits par la Galaxie lors du destriage	119
4.21	Effet du destriage sur le signal du CMB	120
4.22	Effet du destriage sur le signal du CMB	120
4.23	Destriage appliqué aux données d'Archeops	121
4.24	Destriage appliqué aux données d'Archeops	122
4.25	Variances des coefficients du développement en ondelettes d'un bruit 1/f	127
4.26	Destriage par ondelettes	128
4.27	Destriage par ondelettes	129
4.28	Destriage par ondelettes, seconde itération	130
4.29	Variances des coefficients du développement en ondelettes	131
4.30	Application du destriage à base d'ondelettes	133
4.31	Application du destriage à base d'ondelettes	134
5.1	Biais induit par les approximations de la fonction de vraisemblance	146
5.2	Biais induits par l'approximation de la fonction de vraisemblance 2	147
5.3	Biais induits par l'approximation de la fonction de vraisemblance 3	148
5.4	Impact des neutrinos sur le spectre de puissance angulaire	154
5.5	Critère de convergence des chaînes	156

5.6	Contraintes de Planck sur les paramètres cosmologiques 1	158
5.7	Contraintes de Planck sur les paramètres cosmologiques 2	160
5.8	Impact des neutrinos sur le spectre de puissance angulaire	162
5.9	Contraintes obtenues avec Planck (avec effet de lentille) sur les paramètres cosmologiques	164
5.10	Contraintes obtenues avec Planck (avec effet de lentille) sur les paramètres cosmologiques	166

Introduction

Après un DEA de *physique nucléaire/physique des particules* effectué en 1995 à Strasbourg, j'ai décidé de m'orienter vers l'enseignement. J'avais cependant le désir de compléter ma formation avec une thèse. Je voulais effectuer ce travail de recherche dans un domaine lié à la fois à la physique des particules et à l'astrophysique. Dans cette optique, j'ai contacté le groupe de cosmologie du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire (LAL) d'Orsay l'été 1999. François Couchot m'a alors proposé de travailler sur le rayonnement fossile de l'Univers (CMB) dans le cadre de l'expérience Archeops.

J'ai effectué mon travail de thèse en parallèle de mon activité professionnelle d'enseignant dans le secondaire. J'avais un service d'enseignement complet les deux premières années (1999-2001). Cependant, il s'est avéré en pratique assez difficile de mener de front les activités de recherche et d'enseignement. J'ai donc diminué ma charge d'enseignement en prenant un service partiel (80%) les trois dernières années de thèse (2001-2004). J'ai alors pu m'impliquer davantage dans mon activité de recherche, et terminer ce travail dans un délai raisonnable.

Dans la première partie de ce mémoire, je donne les principaux éléments décrivant le cadre théorique du modèle standard de la cosmologie. J'insiste en particulier sur quelques aspects techniques propres à la physique des perturbations cosmologiques. Je présente ensuite le lien entre le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB avec le contenu matériel et la dynamique de l'Univers. Je décris enfin le principe de fonctionnement des codes de calcul utilisés pour déterminer le spectre de puissance angulaire associé à un modèle d'Univers donné.

Dans le deuxième chapitre, je présente les caractéristiques de l'expérience Archeops dans lequel ce travail de thèse a été effectué. Archeops est un ballon stratosphérique dédié à l'étude du CMB. Archeops possède des similitudes avec le satellite Planck, la future mission spatiale européenne de mesure des anisotropies de température du CMB, prévue en 2007. De ce point de vue, Archeops est le précurseur des techniques instrumentales et d'analyse (optique froide, cryostat, stratégie de balayage...) qui seront mises en œuvre pour Planck.

Les parties trois et quatre sont consacrées au travail que j'ai effectué au sein de la collaboration Archeops.

La première phase de ce travail a consisté à déterminer la direction de visée des instruments de mesure avec la meilleure précision possible. Je décris dans un premier temps le dispositif dédié à la détermination de la direction de visée instrumentale. Je présente ensuite la stratégie utilisée pour effectuer la construction de la ligne de visée. Je décris également l'algorithme que j'ai développé afin de déterminer *de façon optimale* la ligne de visée instrumentale.

La deuxième phase de mon travail au sein de la collaboration porte sur l'analyse des données. Je suis intervenu plus particulièrement dans le processus de fabrication des cartes du ciel. La

fabrication de ces cartes est un enjeu important de l'expérience Archeops. Elles apportent en effet des informations sur la physique de la Galaxie. D'autre part, le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB est lui-même déterminé à partir de ces cartes. Cependant, la présence de dérives à basse fréquence dans les données gêne la fabrication des cartes du ciel. Je présente différentes approches possibles permettant de réduire la présence de ces dérives à basse fréquence en évitant d'altérer le signal présent dans les données.

La cinquième partie est consacrée aux contraintes que l'on peut obtenir sur les paramètres cosmologiques. Je présente différents aspects de la méthode utilisée pour obtenir ces contraintes. J'insiste en particulier sur le choix de la fonction de vraisemblance qui permet de comparer les données expérimentales aux modèles théoriques. Je discute dans une dernière partie des limites que l'on peut attendre sur les masses de neutrinos avec la mission Planck.

Pour finir, compte tenu du caractère technique du sujet, de nombreuses formules apparaissent dans ce manuscrit. Les considérations particulières relatives à certaines d'entre elles ont été placées en annexes pour ne pas alourdir le propos.

Chapitre 1

Éléments de cosmologie

Sommaire

1.1 Dynamique de l'Univers	3
1.1.1 L'Univers de Friedmann-Robertson-Walker	4
1.1.2 Matière et énergie dans l'Univers	7
1.1.3 Histoire thermique de l'Univers	8
1.1.4 Neutrinos	9
1.1.5 Inflation	13
1.2 Formation des structures	17
1.2.1 Spectre de puissance	18
1.2.2 Perturbations cosmologiques	20
1.2.3 Évolution des perturbations	22
1.2.4 Fonction de transfert et spectre de puissance de la matière	25
1.2.5 Matière noire chaude	26
1.3 Le rayonnement fossile de l'Univers	26
1.3.1 Origine du rayonnement fossile	27
1.3.2 Description des anisotropies	30
1.3.3 Spectre de puissance à grande échelle - Effet Sachs-Wolfe	31
1.3.4 Calcul numérique des C_l	33
1.3.5 Influence des paramètres cosmologiques sur les anisotropies du CMB . .	36

Dans cette partie, nous rappellerons d'abord les fondements et les résultats du modèle standard de la cosmologie. Nous étudierons ensuite le mécanisme de formation des grandes structures de l'Univers. Nous présenterons pour finir les propriétés du rayonnement de fond cosmologique (Cosmic Microwave Background) et l'intérêt que présente l'étude des anisotropies du CMB.

1.1 Dynamique de l'Univers

Cette section présente les principales caractéristiques du modèle du Big Bang chaud. Le sujet étant très vaste, je me suis efforcé de privilégier les aspects liés au CMB. Cette section s'appuie essentiellement sur les références [2] [10] [17] [18] [24] [25] [26] [27].

La théorie du Big Bang est le modèle cosmologique qui actuellement s'accorde le mieux avec les données expérimentales. Elle permet en particulier d'expliquer trois observations fondamentales portant sur :

- l'expansion de l'Univers,
- la présence du rayonnement de fond cosmologique et ses propriétés,
- l'abondance des éléments légers.

Nous expliciterons notamment la façon dont ces caractéristiques émergent naturellement de la théorie.

1.1.1 L'Univers de Friedmann-Robertson-Walker

Le modèle du Big Bang repose sur l'utilisation de la relativité générale. Dans ce cadre, la dynamique de l'Univers est décrite par les équations d'Einstein. Ces équations font le lien entre la géométrie de l'Univers et son contenu énergétique :

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

En relativité générale, la géométrie est caractérisée par la métrique $g_{\mu\nu}$. Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et la courbure scalaire R sont construits à partir de celle-ci. Le contenu de l'Univers est spécifié à l'aide du tenseur d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein sont des équations non linéaires couplées dont il n'existe pas de solutions générales. Le terme $\Lambda g_{\mu\nu}$ a été introduit initialement par Einstein pour obtenir une solution stationnaire aux équations 1.1. La constante Λ est appelée constante cosmologique. Les observations actuelles suggèrent la présence de cette composante, ainsi que l'homogénéité et l'isotropie à grande échelle de l'Univers. L'homogénéité et l'isotropie de l'Univers permettent de contraindre le choix de la métrique et du tenseur d'énergie-impulsion. L'espace peut alors être décrit à l'aide d'une métrique de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (1.2)$$

où on a posé $c=1$. Le terme k est lié à la courbure de l'Univers. Il est nul si l'Univers est plat, égal à $+1$ si l'Univers est fermé et vaut -1 si l'Univers est ouvert. Le temps t intervenant dans l'expression de la métrique FRW est appelé temps cosmologique ou encore temps propre. Le terme $a(t)$ est appelé le facteur d'échelle. Il permet de rendre compte de l'expansion de l'Univers. La normalisation du facteur d'échelle est usuellement choisie de façon à ce que l'on ait $a(t_0) = 1$, t_0 désignant l'époque actuelle. Les coordonnées (r, θ, ϕ) sont appelées coordonnées comobiles. On définit également le temps conforme η par $d\eta = adt$.

Pour expliciter les équations d'Einstein, il faut calculer les expressions des tenseurs intervenant dans ces équations. Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire se déduisent de la métrique $g_{\mu\nu}$. En ce qui concerne la matière dans l'Univers, l'isotropie et l'homogénéité imposent qu'elle soit un fluide parfait. Le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait s'écrit classiquement sous la forme :

$$T^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu p + (p + \rho) u^\mu u_\nu \quad (1.3)$$

où p est la pression et ρ la densité d'énergie du fluide. u_μ est la quadri-vitesse du fluide, avec $u^\nu u_\nu = -1$. On en déduit alors dans le repère lié au fluide :

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Les équations d'Einstein se réduisent alors à un ensemble de deux équations :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.6)$$

L'équation 1.5 est appelée équation de Friedmann. On a posé $\dot{a} = \frac{da}{dt}$.

Le paramètre H introduit dans 1.5 est le paramètre de Hubble. La valeur actuelle du paramètre de Hubble $H(t_0)$ est appelée constante de Hubble. La valeur de H est liée au taux d'expansion de l'Univers. Les mesures de la valeur de la constante de Hubble sont usuellement données en fonction de la constante réduite h définie par :

$$H(t_0) = H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (1.7)$$

Les mesures actuelles donnent [28] $h = 0,71_{-0,03}^{+0,04}$.

En cosmologie, les distances sont mesurées à l'aide du décalage spectral z (redshift) induit par l'expansion de l'Univers. Ce dernier correspond à $1 + z = \nu_{\text{source}}/\nu_{\text{obs}}$. Le lien entre le redshift et la constante de Hubble peut être explicité de la façon suivante. On considère deux objets éloignés d'une distance comobile x . La distance physique correspondante s'écrit $d = ax$. Du fait de l'expansion de l'Univers, ces objets s'éloignent l'un de l'autre à une vitesse v donnée par :

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\Delta a}{\Delta t} x = \frac{\dot{a}}{a} x = H d \quad (1.8)$$

Cette relation est appelée loi de Hubble. On en déduit alors que, au premier ordre, on a $z \sim v \sim H d$. Cela explique que les distances sont exprimées souvent en unités du type $h^{-1} \text{ Mpc}$.

Voyons comment le redshift z est relié au facteur d'échelle. La durée Δt mise par la lumière pour parcourir la distance (physique) d est $d = \Delta t$. En posant $\Delta\nu = \nu_{\text{obs}} - \nu_{\text{source}}$, on a :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -v = -H d = -H \Delta t = -\frac{\dot{a}}{a} \Delta t = -\frac{\Delta a}{a} \quad (1.9)$$

On en déduit que $\nu \sim \frac{1}{a}$, d'où $1 + z = \frac{1}{a}$. Cela montre que la fréquence et donc l'énergie d'un photon se propageant librement diminue du fait de l'expansion de l'Univers. Ce résultat est en fait généralisable à toutes les particules se propageant librement, la grandeur diminuant en $1/a$ étant la quantité de mouvement.

Il est utile d'expliciter la relation entre le facteur d'échelle et la densité d'énergie. En combinant les équations 1.5 et 1.6, on aboutit à :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (1.10)$$

On doit utiliser ensuite la relation entre p et ρ , appelée équation d'état du fluide. On a $p = w\rho$, où w est le paramètre d'état. On détermine ainsi la relation entre densité d'énergie et facteur d'échelle :

$$\rho \sim a^{-3(1+w)} \quad (1.11)$$

On note (équation 1.5) que la densité d'énergie associée à la courbure décroît en a^{-2} et reste constante pour la constante cosmologique. On peut donc leur associer respectivement un paramètre d'état valant $-\frac{1}{3}$ et -1 . Par ailleurs, pour déterminer l'évolution de a en fonction du temps,

densité d'énergie dominante	paramètre d'état	densité d'énergie	a(t)	R_H
radiation	$w = \frac{1}{3}$	$\rho \sim a^{-4}$	$a \sim t^{\frac{1}{2}}$	$R_H \sim t$
matière	$w = 0$	$\rho \sim a^{-3}$	$a \sim t^{\frac{2}{3}}$	$R_H \sim t$
courbure	$w = -\frac{1}{3}$	$\rho \sim a^{-2}$	$a \sim t$	$R_H \sim t$
constante cosmologique	$w = -1$	$\rho \sim cste$	$a \sim \exp(Ht)$	$R_H \sim cste$

TAB. 1.1 – Évolution du facteur d'échelle et de la densité d'énergie selon la nature de l'énergie dominant la dynamique de l'Univers.

on remplace dans 1.5 ρ par son expression donnée par 1.11. On obtient ainsi l'expression de $a(t)$ en fonction de la nature de la composante énergétiquement dominante. La table 1.1 résume les différentes possibilités.

La distance cH^{-1} (H^{-1} dans le système d'unité où $c=1$) est appelée rayon de Hubble R_H . Elle joue un rôle important dans la description du mécanisme de formation des structures dans l'Univers. Elle délimite la sphère d'influence des processus causaux (gravitation, pression ...). La dynamique des fluctuations de densité de taille plus grande que l'horizon ne dépend que de l'expansion de l'Univers, alors que pour les fluctuations plus petites que l'horizon, les interactions physiques doivent être prises en compte. On remarque que $a(t)$ est toujours croissant au cours du temps. De plus, la taille de l'horizon croît plus rapidement que le facteur d'échelle. Cela signifie qu'une perturbation acausale finit par être rattrapée par l'horizon et devient causale.

L'équation de Friedmann 1.5 peut se réécrire en explicitant les dépendances des différentes densités d'énergie qui interviennent, en fonction du facteur d'échelle. On introduit pour cela la densité critique ρ_c , définie par :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.12)$$

La densité critique dépend du temps et on a, à t_0 :

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,88 \cdot 10^{-29} \text{ h}^2 \text{ g cm}^{-3} \quad (1.13)$$

On définit alors les rapports $\Omega_i(t) = \frac{\rho_i}{\rho_c}$ pour les contributions relatives à la densité de chaque composante : matière, radiation, courbure et constante cosmologique :

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &= \frac{\rho_m}{\rho_c} & \Omega_{rad}(t) &= \frac{\rho_{rad}}{\rho_c} \\ \Omega_\Lambda(t) &= \frac{\Lambda}{3H^2} & \Omega_k(t) &= -\frac{k}{a^2 H^2} \end{aligned}$$

L'équation de Friedmann 1.5 se réécrit alors :

$$1 = \Omega_m(t) + \Omega_{rad}(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_k(t) \quad (1.14)$$

Cette dernière équation montre que la courbure globale de l'Univers (Univers fermé, ouvert ou plat) est déterminée par la somme $\Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda$. Cette dernière est usuellement appelée densité totale de l'Univers et est notée Ω . Dans la suite, on notera $\Omega_i(t_0) = \Omega_i$ afin d'alléger l'écriture. En injectant Ω_i dans l'équation 1.14, on explicite la dépendance des densités d'énergie vis-à-vis du facteur d'échelle :

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_k a^{-2}) \quad (1.15)$$

Nous allons maintenant obtenir l'expression de l'entropie, qui nous sera utile pour la suite. On peut noter que l'équation 1.10 se réécrit sous la forme :

$$d(\rho a^3) = -p da^3 \quad (1.16)$$

le terme ρa^3 représente l'énergie contenue dans un volume $V = a^3$. En comparant avec l'expression de la première loi de la thermodynamique, $dU = TdS - pdV$, on voit que l'entropie contenue dans le volume comobile a^3 est conservée. L'expression de l'entropie s'obtient en réécrivant la première loi sous la forme suivante [17] :

$$TdS = d(\rho V) + pdV = d[(p + \rho)V] - Vdp \quad (1.17)$$

L'égalité des dérivées croisées,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} \quad (1.18)$$

conduit alors à

$$dp = \frac{\rho + p}{T} dT \quad (1.19)$$

En appliquant cette relation à 1.17 et en intégrant, on aboutit à

$$S = \frac{(\rho + p)V}{T} \quad (1.20)$$

Dans le cas où la densité d'énergie de l'Univers est dominée par la radiation, on vérifie que l'entropie est proportionnelle au nombre de photons. C'est pourquoi, le rapport entre le nombre de photons et de baryons est souvent appelé entropie par baryon.

1.1.2 Matière et énergie dans l'Univers

Nous allons maintenant discuter des différentes formes de densité d'énergie. La matière ordinaire est appelée en cosmologie matière baryonique. Les mesures les plus récentes indiquent que [28] :

$$\begin{aligned} \Omega &= 1,02 \pm 0,02 & \Omega_\Lambda &= 0,73 \pm 0,04 \\ \Omega_b &= 0,044 \pm 0,004 & \Omega_m &= 0,27 \pm 0,04 \end{aligned}$$

Ces mesures montrent que la matière contenue dans l'Univers est essentiellement non baryonique. Celle-ci est appelée matière noire. Il existe en fait plusieurs types de matière noire. Les cosmologistes appellent matière noire froide les particules non relativistes lors des processus de formations des grandes structures. Le terme matière noire chaude désigne les particules relativistes lors de l'entrée des perturbations correspondant aux échelles galactiques dans l'horizon. Les neutrinos sont des particules de matière noire chaude. Cependant, ils ne peuvent pas constituer l'essentiel de la matière noire. En effet, la matière noire chaude conduit à un processus de formation des structures où les super-amas se forment en premier et les galaxies en dernier. Ce scénario n'est pas compatible avec les observations actuelles. La matière noire froide conduit quant à elle d'abord à la formation des plus petites structures (les galaxies), les plus grandes (amas et super-amas) se formant ultérieurement. Si la nature de la matière noire est actuellement inconnue, il existe cependant de bons candidats, le plus vraisemblable étant la particule supersymétrique de plus petite masse.

La nature physique de l'énergie associée à la constante cosmologique est actuellement mal connue. Une des interprétations possibles est d'associer au terme de constante cosmologique

la contribution de l'énergie du vide. Toutefois, le calcul de la densité d'énergie du vide dans le cadre de la théorie quantique des champs conduit à une valeur de l'ordre de 10^{120} fois plus grande que celle observée expérimentalement. La compréhension complète de la nature de la constante cosmologique est l'un des problèmes fondamentaux de la cosmologie.

1.1.3 Histoire thermique de l'Univers

On a vu que la densité d'énergie de l'Univers décroît au fur et à mesure de son expansion. Cela signifie que plus l'on remonte loin dans le passé de l'Univers plus la température de celui-ci est élevée. On peut ainsi établir la chronologie de l'Univers jusqu'à la limite correspondant à l'échelle de Planck. La physique impliquée dans cette chronologie a été testée jusqu'à environ 200 GeV par les physiciens des particules. Au-delà de cette énergie, la description des événements est spéculative.

Ère Planckienne : la longueur d'onde ($\sim 10^{-35}$ m) associée à cette échelle d'énergie (10^{19} GeV) est du même ordre de grandeur que le rayon de Hubble R_H . La description de l'Univers doit alors inclure les effets quantiques.

Grande Unification, Inflation... : après l'ère de Planck, la gravitation s'est découplée des autres interactions, qui restent unifiées (Grand Unified Theory). Entre 10^{18} et 100 GeV, plusieurs événements importants ont lieu. D'une part, il y a brisure de la symétrie de grande Unification. Les interactions électrofaible et forte se séparent. D'autre part, l'inflation a lieu et génère les fluctuations de densités dans l'Univers primordial. Les modèles d'inflation permettent de caractériser ces fluctuations et de les confronter aux observations expérimentales. Un modèle d'inflation donné est donc testable expérimentalement, bien que les détails du mécanisme d'inflation (début, fin, nature du champ scalaire associé à l'inflation...) soient mal connus. L'échelle d'énergie de l'inflation est supposée proche de celle de grande Unification, soit $\sim 10^{15}$ GeV. A la fin de l'inflation, le champ associé à celle-ci génère des particules produisant un Univers dominé par la densité d'énergie de radiation. Cette dernière étape est appelée réchauffement (*reheating*). Un autre acteur probable intervenant à haute énergie est la supersymétrie. Là encore, de nombreux points restent à préciser. Suivant quel mécanisme et à quelle échelle d'énergie la supersymétrie est-elle brisée ? Quel rôle joue-t-elle dans les différents processus décrits précédemment ? Le fait que l'Univers observable soit formé de matière plutôt que d'anti-matière implique une asymétrie matière/anti-matière. Quel est le mécanisme à l'origine de cette asymétrie ?

Fin de l'unification électro-faible : nous entrons dans le domaine de la physique connue. Ces échelles d'énergie sont en effet accessibles avec les accélérateurs de particules actuels. Le premier événement intervenant est la brisure de symétrie électro-faible vers 100 GeV. Les bosons de jauge Z et W^\pm acquièrent une masse via le mécanisme de Higgs. Puis vers 100 MeV, la température devient suffisamment basse pour que les quarks se combinent en hadrons. Les particules présentes sont les protons, neutrons, électrons, positrons, neutrinos et photons. L'équilibre thermique est assuré via les interactions faible et électromagnétique. Les autres particules, instables, se sont désintégrées. Puis, lorsque la température descend autour de 1 MeV, les neutrinos se découplent. Peu après les électrons et les positrons s'annihilent.

Nucléosynthèse : à 0,2 MeV la température est suffisamment descendue pour que les protons et les neutrons puissent se combiner pour former des noyaux atomiques. Les prédictions de la nucléosynthèse sont déterminées en fonction du rapport entre le nombre de baryons et le nombre de photons $\eta = \frac{n_B}{n_\gamma}$. Le fait que η , le rapport baryons-photons¹, soit de l'ordre de 10^{-10} implique que la température de l'Univers doit descendre en-dessous de l'énergie de liaison des noyaux pour

¹la lettre η est utilisée pour représenter le rapport baryon-photon, le temps conforme ou encore un des paramètres de roulement lent caractérisant l'inflation.

que la photo-dissociation cesse. La nucléosynthèse prévoit des abondances d'éléments légers en accord avec les observations, ce qui constitue un des grands succès du modèle du Big Bang.

Domination de la matière : la densité d'énergie de radiation varie en a^{-4} alors que la densité d'énergie de matière progresse en a^{-3} . L'Univers a donc connu une phase de domination de l'énergie de radiation, puis une phase de domination de la matière. Les mesures actuelles indiquent que l'on a $\Omega_{rad} = 2,56 \cdot 10^{-5} h^{-2}$. Le redshift z_{eq} correspondant à la transition entre ces deux périodes est défini comme :

$$(1 + z_{eq})\Omega_{rad} = \Omega_m \quad (1.21)$$

On obtient alors :

$$z_{eq} = 3,9 \cdot 10^4 \Omega_m h^2 \quad (1.22)$$

Ce redshift correspond à une température $T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \sim 1 \text{ eV}$. Les fluctuations primordiales de matière noire commencent alors à croître par instabilité gravitationnelle.

Recombinaison et découplage des photons : vers 0,3 eV (3000 K), les électrons se combinent avec les protons pour former des atomes d'hydrogène. L'énergie correspondant à la recombinaison est beaucoup plus basse que 13,6 eV. Cela est, ici aussi, lié au fait qu'il y a beaucoup plus de photons que de baryons. Après le découplage des photons, les fluctuations de densité de matière baryonique croissent, la pression de radiation ne contrebalançant plus la gravité.

Formation des grandes structures : la croissance des fluctuations de matière, sous l'effet de la gravitation, donne naissance aux premières structures. Le mécanisme de formation le plus favorisé actuellement (scénario bottom-up) suppose que les galaxies se sont formées en premier vers 15-20 K. Les galaxies se sont ensuite regroupées en amas et en superamas.

Époque actuelle : le rayonnement thermique s'est refroidi pour former le rayonnement fossile à 2,73 K que nous observons aujourd'hui. Les perturbations primordiales ont induit des anisotropies de température de l'ordre de $10^{-3}\%$ dans le rayonnement fossile. La formation des structures a rendu l'Univers inhomogène à petite échelle.

1.1.4 Neutrinos

Nous donnons dans cette section quelques éléments concernant les propriétés cosmologiques des neutrinos. Regardons pour commencer de façon un peu plus détaillée le mécanisme de découplage d'une particule. Les grandeurs à considérer sont le taux de réaction Γ du processus assurant l'équilibre thermique de la particule considérée et le taux d'expansion H de l'Univers. Lorsque que $\Gamma < H$, le taux d'expansion est trop élevé par rapport au taux d'interactions, le libre parcours moyen de la particule $\lambda \simeq \Gamma^{-1}$ devient alors plus grand que le rayon de Hubble H^{-1} . La particule se découple du reste de l'Univers. On dit qu'elle est gelée.

Pour maintenir l'équilibre thermique, les neutrinos se couplent aux électrons via les réactions du type :

$$\begin{aligned} \bar{\nu} + \nu &\leftrightarrow e^+ + e^- && \text{annihilation} \\ \bar{\nu} + e^- &\leftrightarrow \bar{\nu} + e^- && \text{diffusion} \end{aligned}$$

Pour des énergies inférieures à $M_Z = 91 \text{ GeV}$, la section efficace de ces interactions est proportionnelle à $G_F^2 s$, où \sqrt{s} est l'énergie du centre de masse [27],[12] :

$$\sigma \simeq \frac{1}{3\pi} G_F^2 E_\nu^2 \quad (\text{annihilation}) \quad (1.23)$$

$$\sigma \simeq \frac{1}{\pi} G_F^2 m_e E_\nu \quad (\text{diffusion}) \quad (1.24)$$

Pour des énergies supérieures au MeV, l'équilibre se fait essentiellement via la réaction d'annihilation, dont la section efficace est donnée par la formule 1.23. Le taux d'annihilation $n_\nu \langle \sigma v \rangle$, correspond pour les énergies comprises entre 1 et 90 GeV à :

$$\Gamma \simeq n_\nu \frac{1}{3\pi} G_F^2 E_\nu^2 \quad (1.25)$$

$$\simeq \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2T^3 \frac{G_F^2 T^2}{3\pi} \quad (1.26)$$

$$\simeq \frac{0,6 G_F^2 T^5}{\pi^3} \quad (1.27)$$

Le taux d'expansion, lors de la phase de domination du rayonnement, varie comme :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{8\pi G}{3} \rho_{rad} \simeq \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g^* T^4 \quad (1.28)$$

avec

$$g^* = \sum_{bosons} g_i + \frac{7}{8} \sum_{fermions} g_i \quad (1.29)$$

g^* comptant les degrés de liberté internes des particules relativistes. En comptant² 3 familles de neutrinos, les photons, positrons et électrons, on trouve $g^* = 43/4 \simeq 10$. On a donc $H \simeq \Gamma$ pour :

$$T \simeq \pi^{3/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{0,9} \right)^{1/3} \left(\frac{G^{1/2}}{G_F^2} \right)^{1/3} \simeq 6,5 \left(\frac{G^{1/2}}{G_F^2} \right)^{1/3} \quad (1.30)$$

Avec $G^{-1/2} \simeq 1,22 \cdot 10^{19}$ GeV et $G_F \simeq 1,17 \cdot 10^{-5}$ GeV⁻², on obtient :

$$T \simeq 5 - 6 \text{ MeV}. \quad (1.31)$$

Le calcul complet basé sur la résolution numérique de l'équation de Boltzmann, prenant en compte toutes les interactions électron-neutrino et neutrino-neutrino, donne [4] : $T_{\nu_e} \simeq 1,3$ MeV et $T_{\nu_\mu, \nu_\tau} \simeq 1,5$ MeV.

L'estimation précédente a été effectuée en supposant que les neutrinos étaient relativistes au moment du découplage. Or, la limite issue de la désintégration β du Tritium indique que [7] :

$$m_{\nu_e} < 3 \text{ eV} \quad (1.32)$$

L'hypothèse que les neutrinos sont relativistes au moment du découplage est donc au moins vérifiée par le neutrino électronique.

La mise en évidence des oscillations de neutrinos montre que les états par rapport auxquels les interactions faibles sont définies, $\boldsymbol{\nu}' = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$, ne coïncident pas avec les états propres de masse $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Le passage d'une base à l'autre s'effectue via une transformation unitaire U telle que :

$$\boldsymbol{\nu}' = U \boldsymbol{\nu} \quad (1.33)$$

Les masses (m_e, m_μ, m_τ) sont reliées aux états propres de masse via :

$$m_\nu = U \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} U^T \quad (1.34)$$

²On considère une température suffisamment basse pour que seul ces particules soient susceptibles d'être produites...

La matrice de mélange U est paramétrée par trois angles de mélanges ($\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$) et une phase φ de sorte que :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\varphi} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

avec $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Les résultats des mesures d'oscillations solaire et atmosphérique de neutrinos indiquent que [22] :

$$\begin{aligned} \Delta m_{sol}^2 &= \Delta m_{12}^2 \sim 7 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ \Delta m_{atm}^2 &= |\Delta m_{23}^2| \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \end{aligned}$$

Les expériences de mesures d'oscillations ne sont sensibles qu'aux différences des carrées des masses. L'échelle du spectre de masse lui-même n'est pas contraint. Les résultats obtenus :

$$\Delta m_{sol}^2 = \Delta m_{12}^2 \ll \Delta m_{atm}^2 = |\Delta m_{23}^2| \quad (1.36)$$

permettent de distinguer plusieurs échelles de masses possibles :

- $m_1 \sim m_2 < m_3$, hiérarchie directe
- $m_1 \sim m_2 > m_3$, hiérarchie inverse.

Le signe de Δm_{23}^2 spécifie le type de hiérarchie. Notons que pour les deux types de hiérarchie les masses peuvent être dégénérées si : $m_1 \sim m_2 \sim m_3 \gg |\Delta m_{23}^2|$.

La contrainte 1.32 porte sur le neutrino électronique, qui n'est pas un état propre de masse. Elle donne, compte tenu des valeurs de Δm_{sol}^2 et Δm_{atm}^2 , également un ordre de grandeur de la limite supérieure des valeurs de masse propre, et donc des valeurs de masse associées aux neutrinos ν_μ et ν_τ . Elle assure en particulier que chacun d'eux est relativiste au moment du découplage.

La densité actuelle de particules relativistes lors du découplage est relativement simple à déterminer. En effet, la fonction de distribution des particules découplées reste la même que celle en vigueur au moment du découplage. Ce point sera discuté dans la section 1.3. Cela signifie en particulier que les neutrinos continuent à se comporter thermodynamiquement de façon relativiste, qu'ils soient effectivement relativistes ou non. Après le découplage, on a :

$$p \sim 1/a \quad (1.37)$$

$$f_{dec}(p) = \frac{1}{\exp(\frac{ap}{T_{dec}}) + 1} \quad (1.38)$$

La température effective des neutrinos varie comme $T_\nu = T_{dec}/a$, et la densité de particules varie comme $n \sim T_\nu^3$. La température des neutrinos devient cependant différente de celle du plasma primordial peu après le découplage. En effet, la température des photons devient trop basse pour maintenir la production de paires électron-positron. Les positrons du plasma primordial s'annihilent avec les électrons. Les photons produits réchauffent l'ensemble des particules, sauf les neutrinos qui se sont découplés. On obtient la relation entre la température des neutrinos et celle des photons en utilisant la conservation de l'entropie. La densité n et la densité d'énergie ρ des particules relativistes s'écrivent [17] :

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{bosons} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{fermions} \end{cases} \quad (1.39)$$

et

$$n = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{bosons} \\ \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{fermions} \end{cases} \quad (1.40)$$

On écrit alors, avec $p=\rho/3$ et en utilisant 1.20 :

$$s = \frac{S}{V} = \frac{4\rho}{3T} = \frac{4\pi^2}{90} g^* T^3 = \frac{2\pi^2}{45} g^* T^3 \quad (1.41)$$

Le terme g^* , défini équation 1.29, compte les degrés de liberté des particules relativistes. Avant l'annihilation électron-positron, les particules relativistes en équilibre sont les photons (2 degrés de liberté), les électrons et positrons (2 degrés de liberté chacun). On a alors $g^* = 2 + 7/8 \cdot 2 \cdot 2 = 11/2$. Après l'annihilation e^+e^- , il ne reste plus que les photons et $g^* = 2$. En écrivant la conservation de l'entropie dans le volume a^3 , on a

$$\left(\frac{2\pi^2}{45} g^* T^3 a^3 \right)_{\text{avant}} = \left(\frac{2\pi^2}{45} g^* T^3 a^3 \right)_{\text{après}} \quad (1.42)$$

Avant l'annihilation e^+e^- , la température des neutrinos est la même que celle des photons. L'annihilation e^+e^- réchauffe les photons. Leur température augmente d'un facteur $(11/4)^{1/3}$, tandis que celle des neutrinos reste inchangée. On a donc :

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \quad (1.43)$$

Avec $T_\gamma = 2,73$ K, on a $T_\nu = 1,95$ K = $1,68 \cdot 10^{-4}$ eV. La densité des neutrinos fossiles (pour 1 famille) à l'époque actuelle est donc de :

$$n_\nu = \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2 T_\nu^3 \quad (1.44)$$

$$= \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2 \frac{4}{11} T_\gamma^3 \quad (1.45)$$

$$= 112 \text{ cm}^{-3} \quad (1.46)$$

Si les neutrinos sont non relativistes³ à l'époque actuelle, alors leur densité d'énergie associée est :

$$\rho_\nu = \sum m_i n_i \quad (1.47)$$

et donc

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum m_i}{94,1 \text{ eV}} \quad (1.48)$$

La mesure de la densité totale de l'Univers permet donc de contraindre la masse totale des neutrinos. Les mesures actuelles privilégient $\Omega = 1$ et $h=0,7$. On a donc :

$$\sum m_i < 46 \text{ eV} \quad (1.49)$$

Ce résultat est remarquable au sens où la simple observation de la dynamique de l'Univers permet de produire des contraintes fortes sur la masse des neutrinos.

³Les contraintes issues des mesures d'oscillations de neutrinos imposent une masse supérieure à 810^{-3} eV pour au moins deux neutrinos.

Notons que la limite obtenue concerne les anti-neutrinos droits et les neutrinos gauches, c'est à dire les particules ayant la bonne hélicité vis-à-vis des interactions faibles. Si les neutrinos sont des particules de Majorana, les anti-neutrinos et les neutrinos correspondent à la même particule. La limite prend alors en compte tous les neutrinos. Cependant si les neutrinos sont des particules de Dirac, les neutrinos droits et les anti-neutrinos gauches n'ont pas la bonne hélicité. La production de ces particules via l'interaction faible est alors atténuée d'un facteur m^2/E^2 par rapport aux neutrinos ayant la bonne hélicité. Les neutrinos droits (et les anti-neutrinos gauches) ont donc un taux d'interaction plus faible que les neutrinos gauches (et les anti-neutrinos droits) et se découplent plus tôt du reste des particules. On montre alors que leur densité d'énergie est négligable [8].

Des contraintes encore plus fortes peuvent être obtenues en considérant l'influence des neutrinos sur la formation des structures. En particulier, la combinaison des mesures du satellite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) sur les anisotropies du rayonnement fossile avec celles du spectre de puissance de la matière effectuées par l'expérience 2dFGRS (Two Degree Field Galaxy Redshift Survey) donnent [28] :

$$\sum m_i < 0,7 \text{ eV} \quad (1.50)$$

Cette limite est plus restrictive que les contraintes actuellement obtenues en laboratoire. Elle restreint, avec les données issues de l'étude des oscillations, le spectre des valeurs de la masse la plus élevée $m = \max(m_1, m_2, m_3)$. On peut, en effet, écrire en combinant les limites issues des expériences de cosmologie et d'oscillation de neutrinos :

$$0,04 \text{ eV} < m < 0,7 \text{ eV} \quad (1.51)$$

La valeur de m est donc contenue dans un intervalle d'environ un ordre de grandeur.

1.1.5 Inflation

Nécessité de l'inflation

Le modèle standard cosmologique permet de rendre compte des observations : l'expansion de l'Univers, l'abondance des éléments légers (nucléosynthèse), l'existence du fond diffus cosmologique... Cependant, il subsiste des problèmes fondamentaux dont ne peut s'accommoder le modèle cosmologique standard :

□ **Problème de la platitude** : on peut écrire l'équation 1.14 en posant $\Omega(t) = \Omega_m(t) + \Omega_{rad}(t) + \Omega_\Lambda(t)$:

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega(t) - 1 \quad (1.52)$$

En utilisant les équations 1.14 et 1.15, on obtient :

$$\Omega_k(t) = 1 - \Omega(t) = \frac{1 - \Omega}{\Omega_\Lambda a^2 + \Omega_m a^{-1} + \Omega_{rad} a^{-2} + 1 - \Omega} \quad (1.53)$$

Pendant la phase de domination de la radiation, on a

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{|1 - \Omega|}{\Omega_{rad}} a^2 \quad (1.54)$$

Les mesures actuelles indiquent que Ω est proche de 1. Or, au fur et à mesure de l'expansion, $\Omega(t)$ s'est éloigné de 1, $|1 - \Omega(t)|$ augmentant comme a^2 . Cela signifie que la valeur initiale

de $\Omega(t)$ doit être ajustée à une valeur proche de 1 avec une précision extrême (fine tuning). En particulier, à l'époque de la nucléosynthèse, on doit avoir $|\Omega(t_{BBN}) - 1| \sim 10^{-15}$. La valeur de $\Omega(t_{BBN})$ doit être ajustée avec 15 chiffres significatifs.

□ **Problème de l'homogénéité :** La distance d_H la plus grande que la lumière ait traversée est appelée *horizon des particules*⁴. On a :

$$d_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \sim R_H \quad (1.55)$$

Au cours de l'expansion de l'Univers, les régions séparées par des distances plus grandes que l'horizon des particules n'ont jamais été en contact causal. En particulier, à l'époque du découplage des photons, la taille d'une région *causale* est $d_H(t_{dec})$ avec :

$$d_H(t_{dec}) = a_{dec} H_0^{-1} \int_0^{a_{dec}} \frac{da}{a^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_k a^{-2}}} \quad (1.56)$$

L'angle $\delta\theta$ sous-tendu par l'horizon dans le rayonnement de fond cosmologique s'obtient à l'aide de la distance angulaire D_A . En utilisant l'expression de la métrique FRW, on trouve que la taille transverse δl d'un objet émettant de la lumière au temps t_e (auquel correspond un facteur d'échelle a_e) est :

$$a_e r d\phi = dl \quad (1.57)$$

Cette relation définit la distance angulaire $D_A = a_e r$. La taille angulaire $\delta\theta$ avec laquelle nous voyons les zones causales au moment du découplage des photons est donc :

$$\delta\theta = \frac{d_H(t_{dec})}{a_{dec} r(t_{dec})} \quad (1.58)$$

avec $r(t_{dec}) = \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \eta_0 - \eta_{dec}$, qui est la distance comobile de la surface de dernière diffusion. On obtient numériquement, avec $\Omega_m = 0,3$ et $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\delta\theta \simeq 2^\circ$. Le CMB est donc composé de l'ordre de 10^4 zones qui n'ont jamais été en contact causal. Comment ces zones peuvent-elles avoir la même température alors qu'elles n'ont jamais été en contact ?

□ **Problème des reliques massives :** Lors du refroidissement de l'Univers, les transitions de phases ont créé des défauts topologiques. En particulier, lors de la brisure de la symétrie GUT, des monopoles magnétiques sont produits. Les calculs indiquent que, typiquement, leur abondance est plus élevée que les limites observationnelles.

L'inflation est un mécanisme qui permet de résoudre les problèmes de la cosmologie standard. Il repose sur le fait que si les distances physiques $d = a\lambda$, où λ correspond à une distance comobile, augmentent plus rapidement que l'horizon H^{-1} , alors les régions causalement connectées peuvent être plus grandes que l'Univers observable. Ce processus, appelé inflation, permet donc d'expliquer l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers observable. La condition pour que les distances physiques augmentent plus rapidement que l'horizon s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{H^{-1}} \right) = \ddot{a} > 0 \quad (1.59)$$

⁴L'horizon des particules d_H et le rayon de Hubble R_H sont a priori deux grandeurs distinctes associées à deux concepts différents. En pratique, on vérifie que avec $a \sim t^n$, on a $d_H = R_H n/(1-n)$. Ces deux grandeurs coïncident pour un Univers dominé par la radiation. Pour un Univers dominé par la matière, on a $d_H = 2R_H$.

Cette dernière équation traduit la condition donc pour que l'inflation se produise. En utilisant l'équation 1.6, la condition d'inflation se réécrit, en supposant que la dynamique de l'Univers est dominée par une composante de densité d'énergie ρ :

$$\rho + 3p < 0 \quad (1.60)$$

Cette condition n'est vérifiée que si le paramètre d'état w est inférieur à $-1/3$. Les phases de domination de la matière ou de domination du rayonnement ne satisfont pas à cette condition. A titre d'exemple, considérons le cas où la matière qui pilote l'expansion de l'Univers possède un paramètre d'état w tel que $w=-1$. On a vu que l'on pouvait attribuer au terme de constante cosmologique une équation d'état similaire. On note que si $w=-1$, alors en utilisant 1.11, $\rho = cste$. L'équation de Friedmann 1.5 devient alors :

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = cste \quad (1.61)$$

On obtient alors $a \sim e^{Ht}$, et $R_H \sim cste$, comme indiqué dans la table 1.1.

Nous verrons dans la section suivante que la dynamique associée à un champ scalaire permet de réaliser la condition d'inflation avec $w \simeq -1$. Le principe de l'inflation est de postuler l'existence d'un champ scalaire qui a gouverné dans le passé la dynamique de l'Univers. Durant cette période l'expansion a été exponentielle. Les fluctuations microscopiques du champ scalaire ont alors été gonflées jusqu'aux échelles macroscopiques (cosmologiques...). La figure 1.1 montre l'évolution d'une perturbation, de longueur d'onde comobile λ , devenant acausale au cours de l'inflation. Lors des phases de domination de la matière et du rayonnement, l'horizon croît plus vite que le facteur d'échelle. Les perturbations sont alors successivement rattrapées par l'horizon, et redeviennent causales. Les perturbations de petite longueur d'onde rentrent plus tôt que les perturbations de grande longueur d'onde.

L'augmentation du facteur d'échelle est caractérisée par le nombre N , appelé *e-fold*, défini par $a(t_f) = a(t_i)exp(N)$ où t_i et t_f définissent les instants correspondant au début et à la fin de l'inflation. On a alors :

$$|1 - \Omega(t_f)| = |1 - \Omega(t_i)|e^{-2N} \longrightarrow 0 \quad si \quad N \gg 1 \quad (1.62)$$

L'inflation offre donc un moyen d'obtenir $\Omega = 1$ indépendamment des conditions initiales pourvu que N soit assez grand. Cela évite d'avoir à introduire ad hoc des conditions initiales nécessitant plus de 15 chiffres significatifs. Le problème de l'horizon est donc résolu du fait de l'expansion supraluminique du facteur d'échelle. Ainsi, les différentes zones de 2° du CMB, qui ne sont pas en interaction, étaient en fait en contact causal avant l'inflation. La prise en compte de la phase d'inflation dans le calcul de l'horizon des particules d_H conduit à :

$$d_H(t) \sim \frac{e^N}{a(t_f)H} \quad (1.63)$$

Pour N suffisamment grand, d_H englobe largement l'Univers observable. De la même façon, toutes les reliques présentes avant l'inflation sont diluées lors de la phase d'expansion.

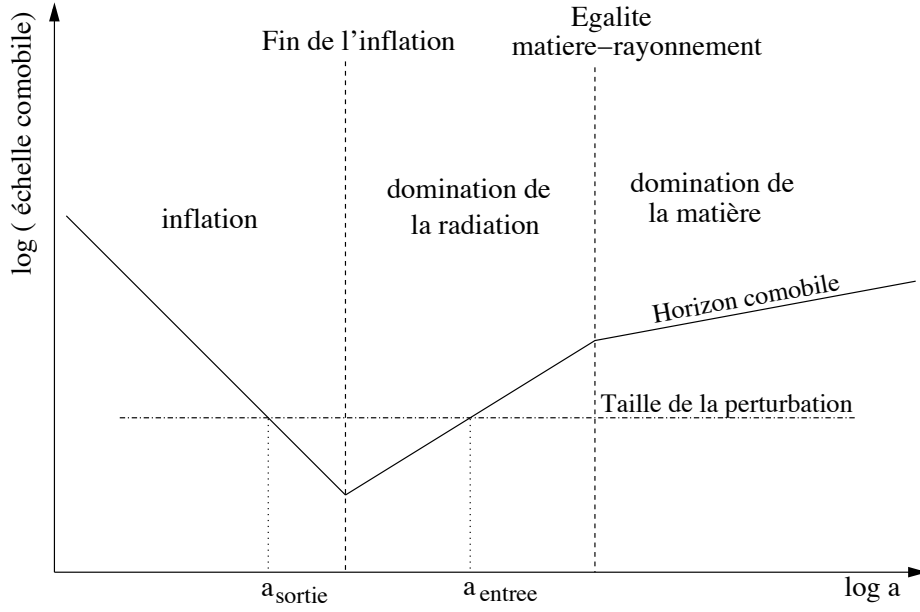


FIG. 1.1 – Évolution de la taille de l’horizon comobile en fonction du facteur d’échelle. La taille de la perturbation considérée devienne plus grande que l’horizon à l’instant a_{sortie} . Lors des phases de domination de la radiation et de la matière, le facteur d’échelle croît moins vite que la taille de l’horizon. La perturbation redevient causale lorsqu’elle est rattrapée par l’horizon à l’instant a_{entree} .

Dynamique de l’inflation

Le théorie d’inflation suppose que, à une certaine époque, la dynamique de l’Univers a été dominée par un champ scalaire ϕ . La particule associée à ce champ est appelée inflaton. La nature exacte de l’inflaton est inconnue, de même que l’échelle d’énergie à laquelle l’inflation domine la dynamique de l’Univers.

Si on note $V(\phi)$ le potentiel du champ, l’équation de la dynamique s’écrit :

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (1.64)$$

où on a posé $\frac{dV}{d\phi} = V'$. Les équations d’Einstein donnent :

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (1.65)$$

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 \quad (1.66)$$

La dynamique de l’Univers correspond alors à celle imposée par une pression et une densité d’énergie donnée par :

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (1.67)$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (1.68)$$

L’équation dynamique 1.64 se réécrit :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (1.69)$$

Lorsque l'énergie est dominée par le potentiel $V(\phi)$, on a $p \simeq -\rho$. On obtient alors, d'après 1.67 et 1.68, $\rho \simeq \text{constante}$ et $H \simeq \text{constante}$, ce qui conduit à une croissance exponentielle du facteur d'échelle. Notons que le potentiel V est homogène à des GeV^4 . L'échelle d'énergie associée à l'inflation correspond donc à $V^{1/4}$.

La plupart des modèles d'inflation satisfont à trois conditions appelées conditions de roulement lent ("slow roll") [18] [20].

- La première condition suppose que le champ ϕ varie suffisamment lentement au cours du temps. Cela implique que le terme $\ddot{\phi}$ peut être négligé dans 1.64 et donc que le terme de *force* V' compense le terme de *friction* $3H\dot{\phi}$ dans 1.64 :

$$V' \simeq 3H\dot{\phi} \quad (1.70)$$

- La seconde condition traduit la nécessité d'avoir $V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ pour que la phase d'inflation apparaisse. L'équation 1.65 se réécrit :

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G V(\phi) \quad (1.71)$$

On peut écrire alors :

$$\dot{\phi}^2 \simeq \frac{V'^2}{9H^2} \simeq \frac{V'^2}{24\pi G V} \quad (1.72)$$

La condition $V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ se traduit par :

$$\frac{1}{48\pi G} \frac{V'^2}{V^2} \ll 1 \quad (1.73)$$

On exprime cette condition à l'aide du paramètre de roulement lent ϵ sous la forme :

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (1.74)$$

- La troisième condition permet d'assurer que le champ évolue assez lentement pour que l'inflation dure suffisamment longtemps : $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$. Cette relation se traduit de la même façon que précédemment à l'aide du paramètre η :

$$\eta = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (1.75)$$

Il reste à caractériser les perturbations primordiales générées lors de l'inflation. Il faut pour cela définir les grandeurs nécessaires pour décrire les fluctuations de densité, ce qui est l'objet de la section suivante.

1.2 Formation des structures

On a vu que la phase d'expansion inflationnaire permet d'expliquer l'homogénéité et la platitude de l'Univers. L'inflation donne également une explication quant à la génération de fluctuations dans l'Univers primordial. L'idée est que les fluctuations quantiques du champ associé à l'inflaton ont été étirées jusqu'aux dimensions cosmologiques. Ces fluctuations ont alors induit les structures à grande échelle observées aujourd'hui.

La théorie des perturbations étant un sujet très technique, nous ne présenterons que les principaux résultats illustrant la façon dont les prédictions de l'inflation sont reliées aux données observationnelles.

Pour rédiger cette section, je me suis principalement appuyé sur les références [3] [10] [18] [19] [20] [21] [23].

1.2.1 Spectre de puissance

Une des conséquences de l'inflation est de prédire des fluctuations gaussiennes. Le caractère gaussien des fluctuations vient de l'indépendance des composantes de Fourier les caractérisant. En effet, si chaque mode est indépendant, leur superposition conduit naturellement à un champ gaussien. Cette indépendance a une double origine. D'une part l'origine quantique des fluctuations quantiques génèrent des modes indépendants. D'autre part la linéarité des équations, due au fait que les perturbations sont petites, préserve l'indépendance des modes. On peut noter que les modes eux-mêmes n'ont pas nécessairement besoin d'avoir une statistique gaussienne.

Les fluctuations de densité initiales étant de petite amplitude, les inhomogénéités de densité de matière $\delta(\mathbf{x}, t)$ sont définies par :

$$\rho(\mathbf{x}) = \bar{\rho}(1 + \delta(\mathbf{x})) \quad (1.76)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne. La transformée de Fourier de $\delta(\mathbf{x})$, $\delta(\mathbf{k})$ est donnée par :

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \delta(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (1.77)$$

Le spectre de puissance est défini comme :

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle = P(k) \delta_D(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.78)$$

Du fait de l'isotropie, le spectre de puissance P ne dépend que du module de \mathbf{k} . La variance des fluctuations est reliée au spectre de puissance de la façon suivante :

$$\langle \delta(\mathbf{r})^2 \rangle = \int d^3k P(k) \quad (1.79)$$

$$= \int 4\pi d \ln k k^3 P(k) \quad (1.80)$$

$$= \int d \ln k \mathcal{P} \quad (1.81)$$

La quantité $\mathcal{P}(k) = 4\pi k^3 P(k)$ correspond au spectre de puissance par décade. Les fluctuations étant gaussiennes, toutes leurs propriétés sont alors encodées dans la fonction de corrélation à deux points. On voit que cette dernière est directement reliée au spectre de puissance. C'est pourquoi le spectre de puissance joue un rôle central en cosmologie.

Les inhomogénéités initiales ont donné naissance aux structures que nous observons aujourd'hui. Les fluctuations initiales ont été amplifiées par instabilité gravitationnelle. Cependant, la dynamique des fluctuations n'est pas identique à toutes les échelles. Comme nous le verrons dans la section suivante, l'amplification des fluctuations correspondant aux petites échelles a commencé plus tôt dans le passé. L'amplification est donc plus importante aux petites échelles, ce qui pose deux problèmes. D'une part l'approximation linéaire n'est plus possible. La dynamique

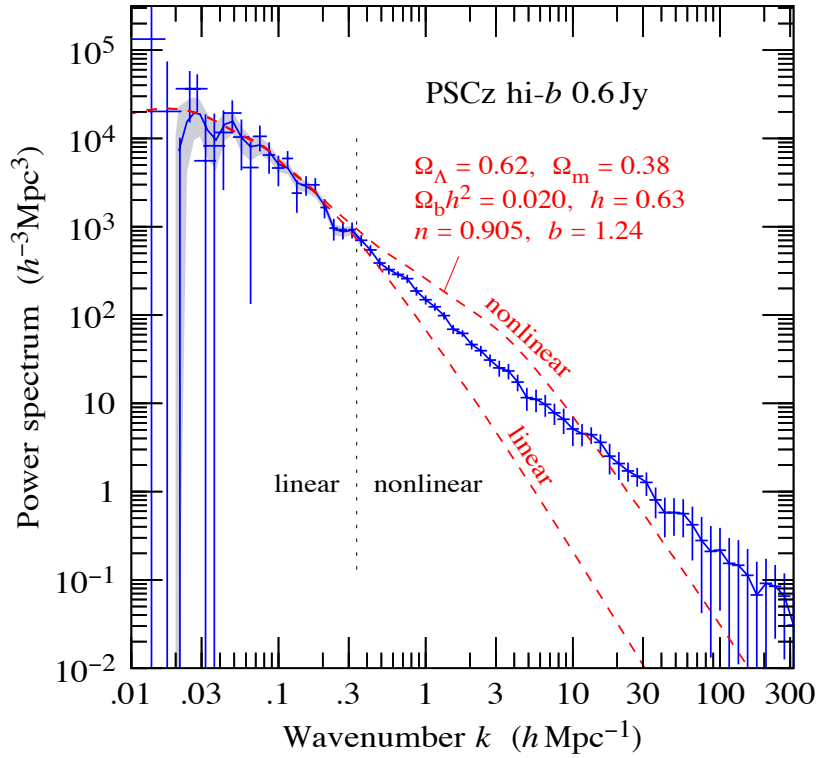


FIG. 1.2 – Spectre de puissance de matière mesuré par l'expérience PSCz (IRAS Point Source Catalog Redshift Survey). La figure est extraite de la référence [11]. La ligne verticale en pointillés délimite les échelles pour lesquelles l'évolution des perturbations n'est plus linéaire.

non linéaire, beaucoup plus complexe, ne peut se décrire qu'à l'aide de simulations numériques, voir figure 1.2. La comparaison directe entre le spectre de puissance mesuré et le spectre calculé est donc plus délicate. D'autre part, à petite échelle, les perturbations ayant été fortement amplifiées, la structure est plus inhomogène qu'à grande échelle et les données doivent alors être lissées pour obtenir une distribution continue. Expérimentalement, ce lissage correspond à la résolution limitée des observations.

La mesure des fluctuations relatives à une échelle R est également une quantité utilisée couramment en cosmologie. Les fluctuations sont définies en terme de variance σ_R^2 relativement à une cellule de dimension R , de forme cubique ou de sphère gaussienne. La cellule est caractérisée par une fonction fenêtre, $W(x/R)$. On prend, pour les cellules cubiques par exemple, $W(x/R)$ telle que $W(x/R) = 0$ si $x > 1$ et $W(x/R) = 1$ sinon. La variance est liée au spectre de puissance via :

$$\sigma_R^2 = \int d^3k P(k) \tilde{W}^2(kR) \quad (1.82)$$

où \tilde{W} est la transformée de Fourier de W . La valeur de R pour laquelle σ_R est proche de 1 est typiquement de l'ordre de $8h^{-1}\text{Mpc}$. C'est pourquoi σ_8 joue un rôle particulier en cosmologie comme mesure du niveau de fluctuation de matière.

1.2.2 Perturbations cosmologiques

Introduction

Nous donnons un aperçu simplifié du traitement des perturbations cosmologiques en relativité générale. Le but de cette présentation est de comprendre comment les fluctuations générées lors de la phase d'inflation sont reliées à celles observées aujourd'hui. Nous introduisons également les concepts nécessaires à l'étude des anisotropies du CMB. La description de la dynamique se fait dans le cadre de la relativité générale. La faible amplitude des perturbations permet de simplifier l'analyse en linéarisant les équations. L'expression générale d'une métrique FRW perturbée est [3] :

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \quad (1.83)$$

γ_{ij} représente la partie spatiale de la métrique FRW non perturbée. $h_{\mu\nu}$, correspondant au terme de perturbation, se décompose en partie scalaire, vectorielle et tensorielle. Les perturbations vectorielles et tensorielles n'interviennent pas dans la formation des structures, qui ne proviennent que des fluctuations de densité (scalaire). La possibilité d'effectuer des transformations de coordonnées en relativité générale permet de modifier $h_{\mu\nu}$, sans changer les grandeurs non perturbées. Une telle modification est appelée une transformation de jauge. L'expression des modes scalaires de la métrique perturbée s'écrit dans la jauge newtonienne conforme (appelée aussi jauge longitudinale) comme :

$$ds^2 = a^2(\eta) (-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j) \quad (1.84)$$

où l'on s'est placé dans le cas où la métrique non perturbée est plate. Les perturbations sont caractérisées dans cette jauge par deux potentiels scalaires Ψ et Φ .

La dynamique des perturbations est obtenue en résolvant les équations d'Einstein perturbées :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \rightarrow \bar{G}_{\mu\nu} = 8\pi G\bar{T}_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu} \quad (1.85)$$

avec $X = \bar{X} + \delta X$, \bar{X} désignant la valeur non perturbée et δX la perturbation.

Perturbations et inflation

Regardons maintenant le type de spectre prédit par l'inflation. D'un point de vue pratique, l'étude des équations d'Einstein perturbées montre que les perturbations scalaires sont caractérisées par la quantité ζ définie par [10] :

$$\zeta = \frac{\delta a}{a} + \Phi \quad (1.86)$$

Le terme en $\frac{\delta a}{a}$ correspond aux perturbations induites par les fluctuations du champ d'inflation $\delta\phi$:

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{a'}{a}\delta\eta = \frac{\mathcal{H}}{\phi}\delta\phi \quad (1.87)$$

où on a posé $a' = \frac{da}{d\eta}$ et $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$. Cette grandeur est remarquable car elle est constante pour les modes en dehors du rayon de Hubble. Cette propriété va nous permettre de faire le lien entre les perturbations générées lors de l'inflation et celles observées aujourd'hui. Nous avons cependant besoin de réexprimer ζ sous une autre forme, qui apparaîtra lors de l'étude des perturbations scalaires. On montre en effet que la quantité ζ peut s'écrire comme :

$$\zeta = \Phi + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi}{1 + \omega} \quad (1.88)$$

On donne en annexe les principales étapes permettant d'aboutir à ce résultat. Cette expression sera utile dans la partie relative à l'étude des perturbations de densité.

L'étude des perturbations dans le cadre de l'inflation permet de caractériser le spectre des perturbations primordiales. Le spectre de puissance par décade \mathcal{P}_ζ des perturbations primordiales ζ s'écrit :

$$\langle \zeta_k \zeta_{k'}^* \rangle = |\zeta_k|^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.89)$$

$$\mathcal{P}_\zeta = 4\pi k^3 |\zeta_k|^2 \quad (1.90)$$

On montre [18] [10] alors que l'inflation prédit que le spectre \mathcal{P}_ζ peut s'écrire sous la forme d'une loi de puissance ⁵ :

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{4\pi G}{\epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_s-1} = A_s \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_s-1} \quad (1.91)$$

où n_s est appelé indice spectral scalaire. n_s est relié aux paramètres de roulement lent :

$$n_s \simeq 1 - 6\epsilon + 2\eta \quad (1.92)$$

On s'attend donc à ce que n_s soit proche de 1 et donc que le spectre soit quasi invariant d'échelle.

L'inflation génère également des perturbations tensorielles, c'est à dire des ondes gravitationnelles. Le spectre de puissance des perturbations tensorielles est défini par :

$$\sum_\lambda \langle h_{k,\lambda} h_{k',\lambda}^* \rangle = P_h \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.93)$$

$$\mathcal{P}_h = 4\pi k^3 P_h = 64\pi G \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_t} = A_t \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_t} \quad (1.94)$$

La somme s'effectue sur les deux modes de polarisation des ondes gravitationnelles. L'amplitude des fluctuations est en fait identique pour chacun des deux types de polarisation. C'est pourquoi l'amplitude du spectre n'est décrite que par une seule variable. On peut remarquer que l'amplitude du spectre A_t est proportionnelle au potentiel inflationnaire V . D'autre part, l'indice tensoriel n_t est lié aux paramètres de roulement lent :

$$n_t \simeq -2\epsilon < 0 \quad (1.95)$$

L'approximation de roulement lent implique donc que le spectre des perturbations tensorielles soit quasiment invariant d'échelle. On note aussi que l'amplitude des fluctuations tensorielles est beaucoup plus faible que celle des fluctuations scalaires :

$$r = \frac{A_t}{A_s} = 16\epsilon \quad (1.96)$$

La relation 1.96 se traduit par une contrainte sur le rapport des contributions scalaires et tensorielles au spectre de puissance des anisotropies de température. On montre en effet que l'on a [10][18] :

$$\frac{C_{l=2}^{(T)}}{C_{l=2}^{(S)}} \simeq 13,8\epsilon \quad (1.97)$$

Cette contrainte, connue sous le nom de relation de consistance, est une prédiction propre à l'inflation. Elle traduit le fait que les perturbations scalaires et tensorielles sont générées à partir du potentiel inflationnaire $V(\phi)$ ⁶.

⁵En fait, on définit un indice spectral effectif $n_s(k) = \frac{d \ln \mathcal{P}_\zeta}{d \ln k}$. Sur les intervalles où $n(k)$ est constant, \mathcal{P}_ζ a un comportement en loi de puissance et on peut définir $\mathcal{P}_\zeta \sim k^{n_s-1}$

⁶Ce qui explique également que pour les modèles d'inflation à plusieurs champs, la relation 1.97 ne soit plus vérifiée...

1.2.3 Évolution des perturbations

Dynamique des perturbations adiabatiques

Pour obtenir la dynamique des perturbations, il faut spécifier le tenseur d'énergie-impulsion. Dans le cas d'un fluide, on a :

$$T^\mu_\nu = -\delta^\mu_\nu p + (p + \rho) u^\mu u_\nu + \Pi^\mu_\nu \quad (1.98)$$

Le terme Π^μ_ν représente la composante anisotrope du tenseur d'énergie-impulsion. Explicitons la décomposition du tenseur d'énergie-impulsion en partie homogène et perturbée ($T = \bar{T} + \delta T$) :

$$\begin{aligned} T^0_0 = -\rho & \rightarrow \delta T^0_0 = -\delta\rho \\ T^0_i = (\rho + p) v_i & \rightarrow \delta T^0_i = -(\bar{\rho} + \bar{p}) v_i \\ T^i_j = p\delta^i_j + \Pi^i_j & \rightarrow \delta T^i_j = \delta p \delta^i_j + \Pi^i_j \end{aligned}$$

Pour expliciter la contribution scalaire du tenseur d'énergie-impulsion, on introduit les variables θ et σ définies par :

$$\theta = \nabla v \quad , \quad (\bar{\rho} + \bar{p}) \nabla^2 \sigma = - \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta^i_j \right) \Pi^i_j \quad (1.99)$$

où θ représente la divergence de la vitesse et σ le mode scalaire de la composante anisotrope. Les équations de la dynamique des perturbations s'obtiennent à partir des équations d'Einstein perturbées et linéarisées au premier ordre. Elles sont données en annexe.

Les perturbations correspondent, dans le cas où il y a plusieurs espèces, à la somme des contributions de chacune d'entre elles : $\bar{\rho}\delta\rho = \sum_i \bar{\rho}_i \delta\rho_i$, $p = \sum_i p_i$ et $(\bar{\rho} + \bar{p})\sigma = \sum_i (\bar{\rho}_i + \bar{p}_i)\sigma_i$... Le fait que l'Univers soit rempli de fluides (particules) de différente nature fait que la pression dépend non seulement de l'énergie ρ , mais aussi de l'entropie S . On a pour un mélange de radiation et de matière [23] :

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_S \delta \rho + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho \delta S = c_s^2 \delta \rho + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho \delta S \quad (1.100)$$

où c_s correspond à la vitesse du son. Les perturbations pour lesquelles $\delta S = 0$ sont dites adiabatiques. On peut noter que si le fluide n'a qu'une seule composante, les perturbations sont automatiquement adiabatiques. C'est pourquoi les modèles d'inflation à un champ (une composante) conduisent à des perturbations adiabatiques.

Donnons l'expression de la vitesse du son c_s dans le cas où l'Univers ne contient que de la matière noire froide (CDM) et des photons. On doit pour obtenir cette expression utiliser l'entropie par particule de matière noire $S_m = n_r/n_m$. On a alors :

$$\frac{\delta S_m}{S_m} = \frac{n_m}{n_r} \left(\frac{\delta n_m}{n_r} - \frac{\delta n_r n_m}{n_m^2} \right) = \frac{3}{4} \frac{\delta \rho_r}{\rho_r} - \frac{\delta \rho_m}{\rho_m} = \frac{3}{4} \delta_r - \delta_m \quad (1.101)$$

En utilisant d'une part

$$\delta p = \sum w_i \delta \rho_i = \frac{1}{3} \delta \rho_r \quad (1.102)$$

et d'autre part

$$\delta \rho = \delta \rho_r + \delta \rho_m \quad , \quad (1.103)$$

on aboutit à :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S_m} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_m}{\rho_r} \right)^{-1} \quad (1.104)$$

On a donc $c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_m}{\rho_r}\right)^{-1}$. Dans le cas de perturbations adiabatiques, on peut donc écrire $\delta p = w \delta \rho$, avec $w = c_s^2$, soit $w = 0$ pour $\rho_m \gg \rho_r$ et $w = \frac{1}{3}$ pour $\rho_m \ll \rho_r$.

Il existe un autre type de perturbations, correspondant à $\delta \rho = 0$. De telles perturbations sont dites isocourbures. Une perturbation générique est une superposition de perturbations isocourbures et adiabatiques. Cependant comme les modèles d'inflation à un champ ne génèrent que des perturbations adiabatiques, on ne considérera que ce type de perturbations dans la suite.

Dans le cadre de perturbations adiabatiques, les équations décrivant la dynamique des perturbations A.11, A.13, 1.100 et les équations d'évolution du facteur d'échelle $a(\eta)$, A.9 et A.10, conduisent à :

$$\Phi'' + 3 \frac{a'}{a} (1 + c_s^2) \Phi' + k^2 c_s^2 \Phi = 0 \quad (1.105)$$

Cette équation donne l'évolution du potentiel Φ . On va maintenant considérer successivement le cas des perturbations plus grandes, puis plus petites que l'horizon.

Évolution en dehors du rayon de Hubble

On considère des perturbations dont la longueur d'onde est plus grande que le rayon de Hubble. La composante anisotrope du tenseur d'énergie-impulsion est générée par la diffusion des particules. Aux échelles plus grandes que l'horizon, cette composante est nulle. On a donc, en utilisant l'équation A.14, $\Phi = -\Psi$. Pour étudier l'évolution des perturbations, on utilise la variable ζ introduite lors de l'étude de l'inflation. On vérifie que, pour les perturbations en dehors du rayon de Hubble ($k^2 \rightarrow 0$), ζ' conduit au membre de gauche de l'équation 1.105, ce qui signifie que $\zeta' = 0$ et donc que ζ reste constante. On vérifie également que l'équation 1.105 admet deux solutions. L'une est décroissante et l'autre correspond à $\Phi = \text{constante}$. Ce qui permet d'écrire en utilisant l'équation 1.88 :

$$\zeta = \frac{5 + 3w}{3 + 3w} \Phi = \text{cste} \quad (1.106)$$

On en déduit que lors de la transition de la domination rayonnement à la domination de la matière le potentiel Φ passe de Φ_r à $\Phi_m = \frac{9}{10} \Phi_r$. De plus, en dehors de l'horizon, les équations A.11 et A.9 donnent :

$$\begin{array}{llll} \text{Domination de la radiation :} & \rho_r \gg \rho_m & \rightarrow & \Phi_r = \frac{1}{2} \delta_r = \frac{2}{3} \delta_m \\ \text{Domination de la matière :} & \rho_m \gg \rho_r & \rightarrow & \Phi_m = \frac{9}{10} \Phi_r = \frac{1}{2} \delta_r = \frac{2}{3} \delta_m \end{array}$$

On veut faire explicitement le lien entre le spectre des perturbations initiales $\Phi(\mathbf{k}, \eta_{\text{initial}})$ hors de l'horizon et le spectre des perturbations observées aujourd'hui. Pour simplifier, posons $\Phi(\mathbf{k}, \eta_{\text{initial}}) = A(\mathbf{k})$.

Évolution à l'intérieur du rayon de Hubble

La description des perturbations est plus complexe à l'intérieur de l'horizon dans la mesure où les processus causaux interviennent dans la dynamique. On montre que les perturbations de radiation ne croissent pas. Elles oscillent, la pression de radiation compensant les effets gravitationnels. Le comportement des perturbations relatives à la matière n'est pas le même dans les régimes de domination de la radiation et de la matière.

Domination de la radiation : on a dans ce cas $c_s^2 = \frac{1}{3}$. L'équation 1.105 ressemble à celle d'un oscillateur amorti. On montre que le potentiel Φ varie comme [3] :

$$\Phi \sim A(\mathbf{k}) \frac{\cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta)^2} \quad (1.107)$$

On en déduit, via A.11, l'évolution de la perturbation de densité de radiation :

$$\delta_r \sim k^2 \eta^2 \Phi \sim A(\mathbf{k}) \cos(k\eta/\sqrt{3}) \quad (1.108)$$

On vérifie donc bien que les perturbations de densité de radiation oscillent, et ne croissent pas. On montre que durant cette période les perturbations de matière croissent logarithmiquement :

$$\delta_m \sim A(\mathbf{k}) \ln(k\eta) \quad (1.109)$$

Domination de la matière : on a alors pour la vitesse du son $c_s^2 = 0$. L'équation 1.105 admet deux solutions correspondant à un mode décroissant et à un mode constant. On a donc $\Phi = \text{constante}$. Le problème est de préciser la valeur de cette constante. Notons k_{eq} le mode dont la longueur correspond au rayon de Hubble lors de la transition domination de la radiation - domination de la matière. On doit alors envisager deux cas de figure correspondant à deux situations différentes : soit la perturbation entre dans l'horizon pendant la domination de la matière ($k > k_{eq}$), soit elle entre pendant la phase de domination de la radiation ($k < k_{eq}$).

□ On considère les modes pour lesquels $k < k_{eq}$. Le potentiel Φ est constant pendant la phase domination de la matière, à l'extérieur et à l'intérieur du rayon de Hubble. On a donc $\Phi = \text{constante} = \frac{9}{10} A(\mathbf{k})$. Dans la limite des petites longueurs d'onde, la relation A.11 entre le potentiel Φ et la perturbation de densité devient alors :

$$k^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + \rho_r \delta_r) \quad (1.110)$$

En particulier, dans le cas de la domination de la matière :

$$k^2 \Phi = 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m \quad (1.111)$$

Comme $\Phi = \frac{9}{10} A(\mathbf{k}) = \text{constante}$, on voit que les perturbations de densité de matière δ_m croissent proportionnellement au facteur d'échelle a . D'autre part, du point de vue spectral, on a $\delta_m \sim k^2 \Phi \sim k^2 A(\mathbf{k})$

□ Les modes avec $k > k_{eq}$ entrent dans le rayon de Hubble pendant la phase de domination de la radiation. Or pendant cette phase, le potentiel Φ oscille et décroît. L'atténuation est donc d'autant plus importante que le séjour à l'intérieur du rayon de Hubble pendant la domination de la radiation est long et donc que k est grand. On montre [3] [18] que, lors de la transition radiation-matière, l'amplitude du mode k du potentiel Φ est modifiée d'un facteur $k^{-2} \ln(k)$.

Matière noire, baryons et perturbations

Nous nous sommes intéressés aux perturbations relatives à la matière noire. Cependant, l'observation directe de la matière noire est par essence impossible. Expérimentalement, l'étude du spectre de puissance est effectué via l'observation de la distribution des galaxies, c'est à dire de

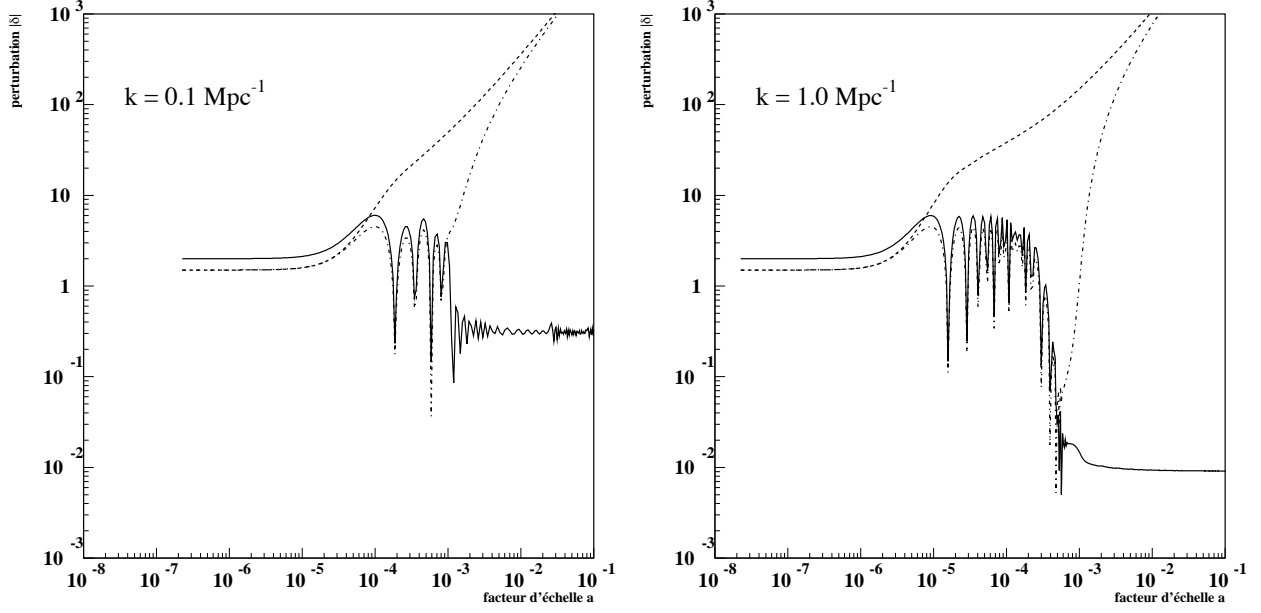


FIG. 1.3 – Figures inspirées de [21] représentant l'évolution des perturbations de densités relatives aux photons, baryons (pointillé-tiret) et matière noire (tiret) en fonction du facteur d'échelle. Ces courbes ont été obtenues en résolvant numériquement les équations A.11 à A.14 en utilisant la suite de programmes COSMIC écrite par E. Bertschinger.

la distribution de la matière baryonique. Nous devons donc étudier l'évolution des perturbations de densité relatives aux baryons.

Avant la recombinaison, les baryons et les photons sont fortement couplés et se comportent comme un plasma. On a vu que la pression de radiation empêche la croissance des perturbations de ce plasma. On a donc au moment de la recombinaison $\delta_b \simeq 0$. Après la recombinaison, les photons et les baryons n'interagissent plus. Les fluctuations de densité de baryons peuvent croître sous l'effet de la gravitation. On montre alors que l'évolution de la perturbation de densité de baryons évolue comme :

$$\delta_b = \delta_{dm} \left(1 - \frac{a_{rec}}{a} \right) \quad (1.112)$$

Cela montre que les fluctuations de matière baryonique rattrapent rapidement les perturbations de matière noire. C'est effectivement ce que l'on observe en résolvant numériquement les équations d'évolution des perturbations, figure 1.3. On s'attend donc à ce que la matière baryonique soit un bon traceur de la matière noire. Le spectre de puissance de la matière visible (galaxies) doit donc être proche de celui de la matière noire.

1.2.4 Fonction de transfert et spectre de puissance de la matière

On a vu dans la section précédente que les perturbations de grandes longueur d'onde ($k < k_e$) restent identiques à leur valeur initiale (à un facteur 9/10 près). Les perturbations plus petites ($k > k_e$) subissent une atténuation à l'intérieur du rayon de Hubble pendant la phase de domination du rayonnement. Le spectre du potentiel Φ entre ces deux régimes limites est décrit à l'aide d'une

fonction de transfert T , définie comme :

$$\Phi(k, \eta_0) = \frac{9}{10} T(k) A(\mathbf{k}) \quad (1.113)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \ll k_e & \rightarrow T(k) = 1 \\ \text{Pour } k \gg k_e & \rightarrow T(k) \sim k^{-2} \ln(k) \end{aligned}$$

Il existe des formules numériques qui permettent d'approximer la fonction aux échelles intermédiaires pour des modèles d'Univers CDM. Les codes de calculs évaluent numériquement la fonction de transfert à partir des équations d'évolution (linéaire).

Le spectre de puissance de matière est donc lié au spectre des perturbations primordiales P_A :

$$\langle \delta(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}') \rangle \sim k^4 \langle \Phi(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}') \rangle \sim k^4 T^2(k) P_A \quad (1.114)$$

Le spectre de puissance des perturbations scalaires initiales prévu par l'inflation est du type $P_A \sim k^{n_s-4}$, avec n_s proche de 1. Le spectre de puissance par décade \mathcal{P}_A varie donc en k^{n_s-1} . Pour $n_s=1$, le spectre est dit invariant d'échelle. Le spectre de puissance de matière s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \ll k_e & \rightarrow P(k) \sim k^{n_s} \\ \text{Pour } k \gg k_e & \rightarrow P(k) \sim k^{n_s-4} (\ln(k))^2 \end{aligned}$$

1.2.5 Matière noire chaude

Si les neutrinos ne constituent pas l'essentiel de la matière noire, ils ont quand même une influence sur le processus de formation des structures. La faible masse et la quasi absence d'interactions des neutrinos font que la distance qu'ils parcourent sans interagir λ_f (free streaming scale) est importante. Les densités de perturbations de neutrinos de longueurs d'ondes inférieures à λ_f sont alors effacées du fait de la diffusion associée au déplacement des neutrinos. De plus, à ces mêmes échelles, la croissance des perturbations des autres composantes (matière noire, baryon) est ralentie du fait que les neutrinos ne contribuent plus au potentiel gravitationnel.

Lorsque les neutrinos sont relativistes, la distance qu'ils ont parcourue sans interagir λ_f est proche de l'horizon. Puis, celle-ci diminue une fois que les neutrinos deviennent non relativistes. Les neutrinos tombent alors dans les puits de potentiels créés par les autres composantes. Le libre déplacement des neutrinos atténue donc les perturbations aux échelles inférieures à λ_f . Plus la masse des neutrinos est faible, plus ceux-ci diffusent longtemps, et plus les modes pour lesquels le spectre de puissance de la matière s'atténue sont petits. Cependant, plus les neutrinos sont massifs, plus leur influence gravitationnelle est importante, et plus leur effet sur le spectre de puissance est marqué. En particulier, l'atténuation du spectre aux petites échelles est d'autant plus marquée que la masse des neutrinos est importante. Cet effet est illustré figure 1.4.

1.3 Le rayonnement fossile de l'Univers

Je me suis appuyé principalement sur les références [1] [5] [6] [13] [14] [15] [16] [29] [30] pour la rédaction de cette partie.

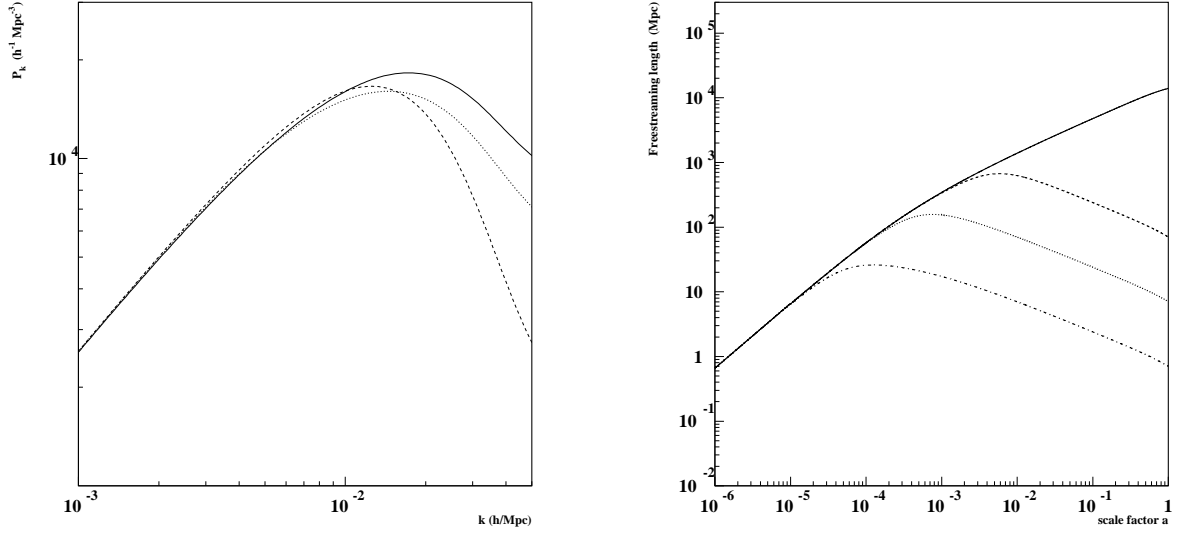


FIG. 1.4 – La figure de gauche montre l'impact des neutrinos sur le spectre de puissance de la matière. Le spectre de puissance associé à un modèle CDM apparaît en ligne continue. L'ajout de neutrinos ($m = 0,3$ eV pointillés, $m = 1,0$ eV tiret) induit une perte de puissance aux petites échelles.

A droite, on montre l'évolution de la distance parcourue par les neutrinos (free streaming scale) en fonction de leur masse ($m = 0,1$ eV tirets, $m = 1,0$ eV pointillés, et $m = 10$ eV pointillés tirets) ainsi que la taille de l'horizon en fonction du facteur d'échelle (ligne continue).

1.3.1 Origine du rayonnement fossile

Gamow, ainsi que Alpher et Herman, ont été les premiers, en 1948, à avoir estimé la température du rayonnement fossile. Ce ne fut qu'en 1965 cependant que les astronomes A. Penzias et R. Wilson mesurent un excès de bruit, inexpliqué, avec leur radiomètre. Ce bruit correspondait à une source isotrope de température $3,5 \pm 1,0$ Kelvin. Au même moment, à Princeton, le groupe de recherche de R. Dicke ⁷ avait commencé la construction de son propre radiomètre afin de détecter le rayonnement fossile, lorsqu'ils eurent par hasard connaissance de l'excès de bruit inexpliqué mesuré par Penzias et Wilson. Ils comprirent alors que Penzias et Wilson les avaient devancés...

Le rayonnement fossile est la signature du passé thermiquement chaud de l'Univers. En effet, lorsque la température de l'Univers était plus élevée, électrons et protons étaient en équilibre thermique avec le rayonnement. Le spectre du rayonnement est donc celui d'un corps noir. Puis, lorsque la température de l'Univers devient suffisamment basse, les protons et les électrons se combinent pour former des atomes d'hydrogène. Le rayonnement se découple alors de la matière, puis se refroidit au fur et à mesure de l'expansion de l'Univers.

Pour préciser les choses, le terme de recombinaison correspond à la formation des atomes

⁷Ce groupe était constitué de R. Dicke, P. Peebles, P. Roll et D. Wilkinson.

d'hydrogène. La réaction associée à la formation d'hydrogène est :



La densité de particules non relativistes s'écrit [17] :

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right) \quad (1.116)$$

où g désigne les degrés de liberté internes ($g=2$ pour une particule de spin $\frac{1}{2}$). En traduisant la condition d'équilibre à l'aide des potentiels chimiques, $\mu_H = \mu_p + \mu_e$, et en utilisant la conservation de la charge électrique, $n_p = n_e$, on obtient :

$$n_H = \frac{g_H}{4} n_p^2 \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{B}{T} \right) \quad (1.117)$$

où B est l'énergie de liaison de l'hydrogène : $B = m_p + m_e - m_H = 13,6eV$. Avec d'une part $g_H = 4$ et $n_e = n_p = x n_B = x(n_p + n_H)$, et d'autre part $n_B = \eta n_\gamma$ et $n_\gamma = 2\zeta(3)/\pi^2 T^3$, on obtient l'équation de Saha :

$$\frac{1-x}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \zeta(3) \eta \left(\frac{T}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{B}{T} \right) \quad (1.118)$$

L'équation de Saha permet de déterminer l'évolution de la fraction d'électrons ionisés x en fonction du redshift. On trouve que la recombinaison a lieu à un redshift z_{rec} compris entre 1200 et 1400.

Le découplage des photons correspond quant à lui au moment où le libre parcours moyen des photons devient plus grand que le rayon de Hubble. On a alors $\lambda_\gamma = \Gamma_\gamma^{-1} \simeq H^{-1}$. L'expression du taux d'interaction de la diffusion Thomson :

$$\gamma + e^- \leftrightarrow \gamma + e^- \quad (1.119)$$

est donnée par $\Gamma_\gamma = x n_e \sigma_T$. On voit que l'on a besoin de l'estimation de la fraction de matière ionisée x pour déterminer l'instant correspondant du découplage. En utilisant l'équation de Saha, on trouve [17] que le redshift du découplage z_{dec} est compris entre 1100 et 1200. Notons que l'on ne peut pas en principe utiliser la fraction de matière ionisée basée sur l'équation de Saha, cette dernière supposant que l'on soit à l'équilibre thermodynamique. Pour déterminer l'évolution d'un système hors équilibre, il faut utiliser l'équation de Boltzmann. On vérifie en fait [17] que les calculs effectués avec l'équation de Saha donnent de bons résultats.

La mesure du spectre du CMB par FIRAS (Far InfraRed Absolute Spectrophotometer), un des instruments du satellite COBE, a montré que celui-ci suit une loi de corps noir de température $T = 2,728 \pm 0,004K$, et ce, à une précision de l'ordre 10^{-5} . Le spectre du rayonnement fossile de l'Univers est donc un spectre planckien, c'est à dire le même type de spectre permettant de caractériser le rayonnement thermique des objets de notre quotidien ! Il peut sembler cependant étonnant que la forme du spectre n'est pas été altérée au moment du découplage. Ce dernier point s'explique du fait que le rapport η^{-1} photon-baryon est de l'ordre de 10^{10} . Aussi, seule une infime portion des photons peut avoir été perturbée par les électrons par diffusion Thomson. Cependant, les effets induits par l'hydrogène, transitions Lyman, peuvent perturber la partie haute fréquence du spectre. Dans cette zone spectrale loin du maximum, les photons peuvent avoir une

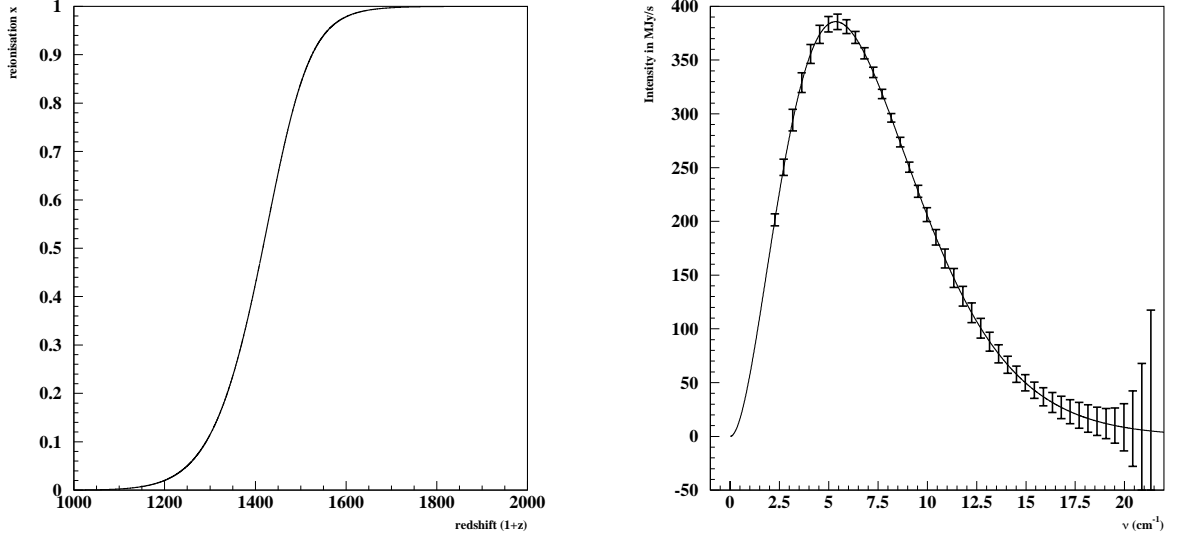


FIG. 1.5 – A gauche, évolution de la fraction de matière ionisée en fonction du redshift. On a pris $\Omega_b h^2 = 0.024$. A droite, mesures effectuées par FIRAS. Figure produite à partir des données de [9]. Les barres d'erreur correspondent à une déviation de $\pm 400 \sigma$. La courbe correspond au corps noir de température $T = 2,728 \text{ K}$.

densité proche de celle de l'hydrogène, et l'argument précédent ne tient plus. La transition qui pose problème (transition $2s \rightarrow 1s$) correspond aujourd'hui à une fréquence de l'ordre de 1000 GHz. Cependant cette bande de fréquence, est fortement contaminée par l'émission galactique rendant quasiment impossible la détection du CMB [26].

Regardons comment évolue la température et la fonction de distribution des photons après le découplage. Les photons se déplacent le long de géodésiques. L'équation de la trajectoire est donnée par :

$$p^0 \frac{dp^\sigma}{d\eta} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \quad (1.120)$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls pour une géométrie décrite par la métrique FRW sont : $\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}$, $\Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a} \delta_{ij}$ et $\Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a} \delta^i_j$. L'énergie d'une particule mesurée par un observateur ayant une quadrivitesse u^μ est $E = u_\mu p^\mu$, avec $u^\mu u_\mu = -1$. Pour un observateur au repos, on a $u^\mu u_\mu = u^0 u_0 = -1$. De plus, $u^0 = \frac{d\eta}{dt} = a^{-1}$. On obtient donc $u_0 = -a$, et $E = -ap^0$. L'équation 1.120 s'écrit donc :

$$\frac{dp^0}{d\eta} + 2 \frac{a'}{a} p^0 = 0 \rightarrow a^2 p^0 = \text{cste} \rightarrow a E = \text{cste} \quad (1.121)$$

L'énergie des photons décroît donc en $1/a$.

L'évolution de la fonction de distribution est donnée par l'équation de Liouville [17] :

$$p^0 \frac{\partial f}{\partial \eta} - \Gamma^i_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (1.122)$$

Soit en explicitant l'expression des symboles de Christoffel :

$$p^0 \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} p^0 p^i \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (1.123)$$

En posant $p^2 = \delta_{ij} p^i p^j$, on a $\frac{\partial p}{\partial p^i} = \delta_{ij} \frac{p^j}{p}$. En utilisant d'autre part $p^\mu p_\mu = 0$, on obtient :

$$p^0 p_0 = -p^i p_i \rightarrow g_{00} (p^0)^2 = -g_{ij} p^i p^j \rightarrow -a^2 (p^0)^2 = -a^2 p^2 \rightarrow E^2 = a^2 p^2 \quad (1.124)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{a'}{a} E \frac{\partial f}{\partial E} = 0 \quad (1.125)$$

Cette équation est vérifiée par les fonctions du type $f(Ea)$. Or, on a vu que $Ea = \text{cte}$, ce qui montre que :

$$f(E) = \frac{1}{\exp(\frac{E}{T}) - 1} \quad (1.126)$$

avec $T = T_{dec}/a$. La température du CMB décroît en $1/a$ et la forme de la fonction de distribution est conservée.

1.3.2 Description des anisotropies

Les anisotropies de température sont notées $\Delta(\mathbf{n}) \equiv \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n})$ où \mathbf{n} correspond à la direction d'observation. Les anisotropies sont décomposées sur la base des harmoniques sphériques :

$$\Delta(\mathbf{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (1.127)$$

Y_l^m étant les harmoniques sphériques. Les coefficients a_{lm} sont aussi des variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle. L'isotropie de l'Univers impose que la variance $\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle$ ne dépende pas de m , mais que de l , c'est à dire de l'échelle angulaire des perturbations. On écrit donc $\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}$. C_l désigne le spectre de puissance angulaire des anisotropies. Il est relié à la fonction de corrélation à deux points $C(\theta)$:

$$C(\theta) = \langle \Delta(\mathbf{n}_1) \Delta(\mathbf{n}_2) \rangle \quad (1.128)$$

$$= \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{l'm'}^*(\mathbf{n}_2) \quad (1.129)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\mu) \quad (1.130)$$

où on a posé $\mu = \cos \theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ et utilisé le théorème d'addition des harmoniques sphériques. Les termes P_l correspondent aux polynômes de Legendre.

On peut montrer que les a_{lm} suivent une statistique gaussienne. En effet, on sait que le champ de température Δ suit lui-même une statistique gaussienne. Cette propriété découle de la nature gaussienne des perturbations primordiales, c'est à dire de l'indépendance des modes de Fourier. La loi de probabilité p associée au champ de température s'écrit donc :

$$p \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \Delta^T C^{-1} \Delta\right) \quad (1.131)$$

La matrice de covariance C est diagonale dans l'espace harmonique. Le produit $C^{-1}\Delta$, qui correspond à une convolution, se ramène à un produit dans l'espace harmonique. Le développement des anisotropies en harmoniques sphériques conduit alors à :

$$p \sim \prod_{lm} \exp\left(-\frac{|a_{lm}|^2}{2C_l}\right) \quad (1.132)$$

Cela montre que les a_{lm} ont également une statistique gaussienne. De ce point de vue, toute l'information encodée dans les a_{lm} est contenue dans le spectre de puissance angulaire C_l .

Les caractéristiques complètes du rayonnement peuvent être décrites par les paramètres de Stockes (T, U, Q, V). Le paramètre V indique le degré de polarisation circulaire. Comme celle-ci n'est pas générée par la diffusion Thomson, on a, pour le CMB, $V=0$. La polarisation du CMB est donc décrite par les paramètres U et Q. Les quantités $U \pm iQ$ se comportent comme des grandeurs de spin 2. Elles se décomposent sur la base des harmoniques sphériques (de spin 2) [30] :

$$U \pm iQ = \sum_{lm} a_{\pm 2, lm} \pm 2Y_{lm} \quad (1.133)$$

L'analyse de la polarisation est compliquée par le fait que les expressions de U et Q dépendent de la base choisie. Cette difficulté est contournée par la possibilité d'introduire des grandeurs E et B invariantes par rotation [30] :

$$E(\mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{E\ lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.134)$$

$$B(\mathbf{n}) = \sum_{lm} a_{B\ lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.135)$$

avec :

$$a_{E\ lm} = -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm}) \quad (1.136)$$

$$a_{B\ lm} = \frac{i}{2}(a_{2,lm} - a_{-2,lm}) \quad (1.137)$$

Les scalaires E et B ont des comportements différents par rapport aux transformations de parité. E est invariant, alors que B change de signe. La notation E/B a été choisie par analogie avec l'électromagnétisme.

Les anisotropies du CMB sont donc caractérisées par les variables T, E, B. L'information associée est encodée dans les moments d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \langle a_{lm}^T a_{l'm'}^{T*} \rangle &= C_l^T \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{E*} \rangle &= C_l^E \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \langle a_{lm}^B a_{l'm'}^{B*} \rangle &= C_l^B \delta_{ll'} \delta_{mm'} & \langle a_{lm}^T a_{l'm'}^{E*} \rangle &= C_l^{TE} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \langle a_{lm}^T a_{l'm'}^{B*} \rangle &= 0 & \langle a_{lm}^E a_{l'm'}^{B*} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.138)$$

L'intercorrélacion entre les modes E/B et T/B est nulle par symétrie.

1.3.3 Spectre de puissance à grande échelle - Effet Sachs-Wolfe

On considère les perturbations de taille plus grande que l'horizon au moment du découplage. On s'attend à ce que les perturbations de température soient directement liées au potentiel

gravitationnel, les processus causaux (oscillations dues à la pression de radiation) n'intervenant pas à ces échelles. La température Δ des photons, avec $\Delta = \Delta T/T$, est modifiée par le potentiel gravitationnel du lieu d'émission :

$$\Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, t_0) = \Delta(\mathbf{x}_e, \mathbf{n}, t_{dec}) + \Psi_e \quad (1.139)$$

Les photons émis depuis un puits de potentiel perdent de l'énergie à cause du redshift gravitationnel. La température apparaît donc plus froide. D'un autre côté, le puits de potentiel attire les photons ce qui augmente la densité. La région est donc plus chaude que la moyenne. Les deux effets précédents (redshift - sur-densité) étant antagonistes, il est difficile de prédire l'action finale du potentiel sur la température observée. On s'attend juste à ce que la variation de température soit proportionnelle au potentiel. Un raisonnement simple [29] permet cependant de trouver cette relation. On a vu que pour les photons : $\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta a}{a}$. De plus, pendant la phase de domination de la matière $a \sim t^{2/3}$, d'où :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta t}{t} \quad (1.140)$$

L'effet du potentiel Ψ sur l'écoulement du temps est traduit par le terme 00 de la métrique :

$$dt' = (1 + 2\Psi_e)^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.141)$$

On en déduit que :

$$\frac{\Delta t}{t} = \Psi_e \quad \rightarrow \quad \Delta(\mathbf{x}_e, \mathbf{n}, t_{dec}) = \left(\frac{\Delta T}{T} \right)_e = -\frac{2}{3} \Psi_e \quad (1.142)$$

On trouve finalement :

$$\Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, t_0) = \frac{1}{3} \Psi_e \quad (1.143)$$

Cette dernière équation est appelée relation de Sachs-Wolfe. On voit que le redshift dû au puits de potentiel est plus important que l'échauffement associé à ce même puits. Les zones de sur-densité ($\Psi < 0$) apparaissent donc plus froides.

On peut maintenant calculer le spectre de puissance angulaire des anisotropies correspondant à ces échelles. Les calculs sont plus simples en utilisant le temps conforme et les coordonnées comobiles. On a en effet en prenant $x_0 = 0$:

$$x_{dec} = \int \frac{dt}{a} = \int d\eta = \eta_0 - \eta_{dec} \quad (1.144)$$

La transformée de Fourier de 1.143 s'écrit alors :

$$\int d^3 \mathbf{k} \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) = \int d^3 \mathbf{k} \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) e^{i \mathbf{k} \mathbf{n} (\eta_0 - \eta_{dec})} \quad (1.145)$$

$$\text{On a donc } \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) e^{i \mathbf{k} \mathbf{n} (\eta_0 - \eta_{dec})} \quad (1.146)$$

On utilise alors la décomposition de la fonction exponentiel en polynômes de Legendre :

$$e^{i \mathbf{k} \mathbf{n} (\eta_0 - \eta_{dec})} = \sum_l (2l+1) i^l j_l(k(\eta_0 - \eta_{dec})) P_l(\mu) \quad (1.147)$$

avec $\mu = \cos(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n})$, $\hat{\mathbf{k}}$ est le vecteur unitaire correspondant à la direction du mode \mathbf{k} . Les fonctions j_l sont les fonctions de Bessel sphériques. En utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques :

$$P_l(\cos(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n})) = \frac{4\pi}{(2l+1)} \sum_m Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.148)$$

avec les relations 1.127, 1.146, 1.147 et 1.148, on obtient :

$$\Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}, \eta_0) = \sum_{lm} \left(4\pi \int i^l j_l(k(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) d^3\mathbf{k} \right) Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (1.149)$$

On a donc en comparant avec 1.127 :

$$a_{lm} = 4\pi \int i^l j_l(k(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{1}{3} \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) d^3\mathbf{k} \quad (1.150)$$

On trouve alors l'expression du spectre de puissance :

$$\begin{aligned} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= (4\pi)^2 \int \int i^l (-i)^{l'} j_l(k(\eta_0 - \eta_{dec})) j_{l'}(k'(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{1}{9} \\ &\quad \langle \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) \Psi^*(\mathbf{k}', \eta_{dec}) \rangle Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}') d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \end{aligned} \quad (1.151)$$

avec $\langle \Psi(\mathbf{k}, \eta_{dec}) \Psi^*(\mathbf{k}', \eta_{dec}) \rangle = P_\Psi \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Puis, en utilisant l'orthogonalité des harmoniques sphériques, on aboutit à :

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = 4\pi \int j_l^2(k(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{1}{9} P_\Psi d^3\mathbf{k} \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (1.152)$$

soit

$$C_l = 4\pi \int j_l^2(k(\eta_0 - \eta_{dec})) \frac{1}{9} P_\Psi d^3\mathbf{k} \quad (1.153)$$

On a vu dans la section précédente que le spectre de puissance primordial suit une loi de puissance du type $P_\Psi \sim k^{n_s-4}$, avec n_s proche de 1. L'intégrale 1.153 se calcule alors analytiquement et on a :

$$l(l+1)C_l \simeq cste \quad (1.154)$$

1.3.4 Calcul numérique des C_l

Nous voulons décrire la méthode utilisée pour calculer numériquement les C_l . Il faut pour cela déterminer l'équation qui pilote l'évolution des anisotropies de température $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \eta)$ pour toutes les échelles angulaires. Pour effectuer ce calcul, on se place dans l'espace de Fourier et on effectue un développement en polynômes de Legendre :

$$\Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}) = \int d^3\mathbf{k} \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0} = \int d^3\mathbf{k} \sum_l (-i)^l (2l+1) \Delta_l(\mathbf{k}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_0} \quad (1.155)$$

avec $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$. On s'attend, compte tenu de la linéarité des équations, à ce que la perturbation relative au mode \mathbf{k} soit proportionnelle à l'amplitude des perturbations primordiales $A_{\mathbf{k}}$. On pose :

$$\Delta_l(\mathbf{k}) = A_{\mathbf{k}} \Delta_l(k) \quad (1.156)$$

En injectant 1.155 dans 1.128, on obtient :

$$\langle \Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_1) \Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_2) \rangle = \int \int \sum_{ll'} d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \langle A_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}'}^* \rangle \Delta_l(k) \Delta_{l'}(k') P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}_1) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{n}_2) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_0} \quad (1.157)$$

En utilisant, $\langle A_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}'}^* \rangle = P_A \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, et le théorème d'addition des harmoniques sphériques, on aboutit à :

$$\langle \Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_1) \Delta(\mathbf{x}_0, \mathbf{n}_2) \rangle = \sum_l (2l+1) 4\pi \int k^2 dk P_A \Delta_l^2(k) P_l^2(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) \quad (1.158)$$

En comparant avec 1.130, on a :

$$C_l = 4\pi \int d^3\mathbf{k} P_A \Delta_l^2(k, \eta = \eta_0) \quad (1.159)$$

où on a explicité le fait que ce sont les multipôles Δ_l correspondant à l'époque actuelle qui interviennent. Pour déterminer la valeur des C_l , il faut d'une part spécifier le spectre des perturbations initiales et d'autre part trouver l'expression des moments multipolaires du mode de Fourier correspondant à la perturbation. Pour cela, il faut utiliser l'équation fondamentale décrivant la dynamique des photons, c'est à dire l'équation de Boltzmann [5] :

$$p^\mu \partial_\mu f - \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu \frac{\partial f}{\partial p^i} = C[f] \quad (1.160)$$

$C[f]$ est le terme décrivant les interactions. Pour obtenir l'équation relative aux perturbations de température Δ , on utilise le développement au premier ordre de f par rapport à Δ :

$$f(x, E, n, \eta) = f_0 + \delta f = f_0 \left(\frac{E}{1 + \Delta} \right) = f_0 - \Delta a E f'_0 \quad (1.161)$$

L'équation de Boltzmann se réexprime alors en fonction de la température. On aboutit en posant $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \Delta$ à [5] :

$$\partial_\eta \Delta + n^i \partial_i \Delta = -n^i \partial_i \Psi - \dot{\Phi} - n^i n^j H_{ij} + C[\Delta] \quad (1.162)$$

où pour alléger les notations, on a posé : $\dot{X} = \partial_\eta X$. Nous avons pris en compte dans la métrique le terme H_{ij} dû aux perturbations tensorielles. Cette équation montre que les perturbations tensorielles (les ondes gravitationnelles) contribuent au spectre de puissance angulaire C_l . Du fait du découplage des modes scalaires et tensoriels, on peut écrire :

$$\Delta_l(\mathbf{k}) = \Delta_l^{(S)}(k) A_{\mathbf{k}} + \Delta_l^{(T)}(k) h_{\mathbf{k}} \quad (1.163)$$

où S et T désignent respectivement les composantes scalaire et tensoriel. Le spectre C_l se décompose donc comme la somme des contributions scalaire et tensorielle :

$$C_l = C_l^{(S)} + C_l^{(T)} \quad (1.164)$$

Dans la suite, on ne considérera que le terme correspondant à la contribution scalaire. En effet, dans le cadre de l'inflation, la contribution tensorielle est plus faible que la contribution des modes scalaires. La figure 1.11, située en fin de section, indique le niveau typique des contributions scalaire et tensorielle au spectre angulaire.

Le terme de collision $C[\Delta]$ de l'équation 1.162 rend compte de la diffusion Thomson et dépend de la polarisation. On montre [30] [15] [3] que cette équation conduit à :

$$\dot{\Delta}^{(S)} + ik\mu\Delta^{(S)} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi + \dot{\kappa} \left(-\Delta^{(S)} + \Delta_0^{(S)} - i\mu V_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right) \quad (1.165)$$

où on a utilisé les notations suivantes :

- Le terme V_b correspond à l'amplitude de la vitesse des baryons et est défini par la relation : $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_b = -i\mu V_b$, \mathbf{n} étant la direction des photons.
- Le terme $\dot{\kappa}$ est appelé profondeur optique différentielle et est défini par :

$$\dot{\kappa} = an_e\sigma_T \quad (1.166)$$

où n_e est la densité d'électrons et σ_T la section efficace de la diffusion Thomson.

- Le terme Π est défini par : $\Pi = \Delta_2^{(S)} + \Delta_{P0}^{(S)} + \Delta_{P2}^{(S)}$. Pour décrire la polarisation associée à chaque mode, on se place dans la base correspondant à $\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}$, le paramètre de Stokes U généré par les perturbations scalaires est alors nul et on pose $Q(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \Delta_P^{(S)}(k, \mu)$. C'est ce terme qui intervient dans l'expression de Π . $\Delta_P^{(S)}$ suit lui-même une équation du type 1.165 [30].
- P_2 est le polynôme de Legendre d'ordre 2. Le terme en ΠP_2 provient du fait que la diffusion Thomson dépend de la polarisation.

Précisons maintenant comment les codes de calcul comme CMBFast ou CAMB résolvent l'équation 1.165. Pour cela, réécrivons 1.165 sous la forme [6] :

$$\dot{\Delta}^{(S)} + ik\mu\Delta^{(S)} + \dot{\kappa}\Delta^{(S)} = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi + \dot{\kappa} \left(\Delta_0^{(S)} - i\mu V_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right) \quad (1.167)$$

$$e^{-i\mu k\eta - \kappa} \partial_\eta \left(e^{i\mu k\eta + \kappa} \Delta^{(S)} \right) = -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi + \dot{\kappa} \left(\Delta_0^{(S)} - i\mu V_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right) \quad (1.168)$$

On arrive à :

$$\Delta^{(S)} = \int_0^{\eta_0} d\eta e^{i\mu k(\eta - \eta_0) + \kappa - \kappa_0} \left[-\dot{\Phi} - ik\mu\Psi + \dot{\kappa} \left(\Delta_0^{(S)} - i\mu V_b - \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right) \right] \quad (1.169)$$

Le terme $g = \dot{\kappa}e^{-(\kappa_0 - \kappa)}$ est appelé fonction de visibilité⁸ et correspond à la probabilité qu'un photon nous parvenant à η_0 ait été diffusé pour la dernière fois à un instant η . La fonction de visibilité est donc très piquée autour de la période de recombinaison η^* . En intégrant par partie pour éliminer les termes en μ ($P_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$), on obtient :

$$\Delta^{(S)}(k, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta e^{i\mu k(\eta - \eta_0)} S_T^{(S)}(k, \eta) \quad (1.170)$$

avec

$$S_T^{(S)}(k, \eta) = g \left(\Delta_0^{(S)} + \Psi + \frac{\dot{V}_b}{k} + \frac{\Pi}{4} + \frac{3\ddot{\Pi}}{4k^2} \right) + e^{-(\kappa_0 - \kappa)} \left(\dot{\Psi} - \dot{\Phi} \right) + \dot{g} \left(\frac{V_b}{k} + \frac{3\dot{\Pi}}{4k^2} \right) + \frac{3\ddot{g}\Pi}{4k^2} \quad (1.171)$$

⁸ $\dot{\kappa}$ correspond au taux de collisions et $e^{-(\kappa_0 - \kappa)}$ donne la probabilité pour qu'un photon ne subisse pas de collision entre η et η_0 . Le terme $\tau = \kappa_0 - \kappa$ est appelé profondeur optique.

Pour obtenir la valeur de C_l en intégrant 1.159, il ne reste qu'à trouver l'expression du moment multipolaire Δ_l . Pour cela, on développe 1.170 sur les polynômes de Legendre en utilisant 1.147 pour obtenir :

$$\Delta_l^{(S)}(k, \eta_0) = \int_0^{\eta_0} d\eta S_T^{(S)}(k, \eta) j_l(k(\eta_0 - \eta)) \quad (1.172)$$

Ainsi, au lieu de résoudre les quelques 3000 équations différentielles couplées correspondant au développement de Legendre de 1.165, il suffit d'intégrer 1.172. La dépendance angulaire est uniquement portée par la fonction de Bessel sphérique. Le terme de source est le même pour tous les multipôles.

1.3.5 Influence des paramètres cosmologiques sur les anisotropies du CMB

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'origine des pics présents dans le spectre de puissance angulaire. Avant la recombinaison, les interactions entre les photons et les baryons sont très importantes, ce qui se traduit par une section efficace élevée. En considérant l'équation 1.165 dans la limite où $\dot{\kappa}$ est très grand, on obtient les relations suivantes :

$$V_b = 3\Delta_1 \quad (1.173)$$

$$\Delta_l = 0 \quad \text{pour } l \geq 2 \quad (1.174)$$

La distribution des photons est donc isotrope dans le repère lié aux électrons. Les multipôles d'ordre supérieur sont en fait générés au moment du découplage lorsque les interactions photon-baryon sont moins efficaces. D'une part la diffusion des photons, des zones denses vers les zones moins denses, efface les fluctuations de température. C'est pourquoi le spectre de puissance est fortement atténué aux petites échelles angulaires. D'autre part, du fait de la diffusion, il y a mélange de photons provenant de zones de température différente, ce qui génère des anisotropies quadripolaires, et donc la polarisation. Les moments multipolaires d'ordre supérieur sont alors générés de proche en proche par diffusion. De ce fait, leur amplitude est de plus en plus faible. La contribution principale au terme de source $S_T^{(S)}(k, \eta)$ de l'équation 1.171 provient donc du monopôle $\Delta_{l=0}(k, \eta)$ et du dipôle $\Delta_{l=1}(k, \eta)$.

Pour discuter des principales caractéristiques du spectre de puissance des anisotropies, on peut donc ne considérer que les contributions des deux premiers multipôles. Le développement de l'équation 1.165 sur les polynômes de Legendre conduit en tronquant les termes supérieurs à $l = 2$ à :

$$\dot{\Delta}_0 = -k\Delta_1 - \dot{\Phi} \quad (1.175)$$

$$\dot{\Delta}_1 = \frac{k}{3}(\Delta_0 + \Psi) - \dot{\kappa}(\Delta_1 - \frac{V_b}{3}) \quad (1.176)$$

En utilisant l'équation d'Euler relative aux baryons :

$$\dot{V}_b = -\frac{\dot{a}}{a}V_b + k\Psi + \frac{\dot{\kappa}}{R}(3\Delta_1 - V_b) \quad (1.177)$$

où $R = \frac{3}{4}\rho_b/\rho_\gamma$, on arrive à l'équation qui gouverne la dynamique du monopôle :

$$\frac{d}{d\eta}(1+R)\dot{\Delta}_0 + \frac{k^2}{3}\Delta_0 = -\frac{k^2}{3}(1+R)\Psi - \frac{d}{d\eta}(1+R)\dot{\Phi} \quad (1.178)$$

En négligeant dans un premier temps la contribution des baryons, ainsi que les variations de potentiel, l'équation 1.178 conduit à :

$$\ddot{\Delta}_0 + \frac{k^2}{3}\Delta_0 = -\frac{k^2}{3}\Psi \quad (1.179)$$

La dynamique de Δ_0 est donc celle d'un oscillateur harmonique soumis au potentiel gravitationnel Ψ . La relation de dispersion correspondante s'écrit $\omega = c_s k$, où $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ est la vitesse du son. Compte-tenu des conditions initiales,

$$\dot{\Delta}_0(0) = 0 \quad (\text{adiabaticité}) \quad (1.180)$$

$$\Delta_0(0) = -\frac{2}{3}\Psi \quad (\text{effet Sachs-Wolfe}) \quad (1.181)$$

la solution de cette équation s'écrit sous la forme :

$$\Delta_0(\eta) = \frac{1}{3}\Psi \cos(kr_s) - \Psi \quad (1.182)$$

Le terme r_s correspond à l'horizon acoustique et est défini par $r_s = \int_0^\eta c_s d\eta \simeq c_s \eta$. Les photons subissent un redshift gravitationnel lorsqu'ils sortent du puits de potentiel de sorte que la température observée est $\Delta_0(\eta) + \Psi$. Les oscillations de température se figent au moment de la recombinaison η^* à la valeur :

$$\Delta_0(\eta^*) + \Psi = \frac{1}{3}\Psi \cos(kr_s) \quad (1.183)$$

Les modes figés dans un extrêum correspondent aux pics que nous observons aujourd'hui dans le spectre de puissance angulaire. Ces modes vérifient la relation :

$$k_n = n \frac{\pi}{r_s^*} \simeq n \frac{\pi}{c_s \eta^*} \quad (1.184)$$

La correspondance entre échelle angulaire et mode de longueur λ s'établit en considérant, d'une part, les équations 1.159, 1.171 et 1.172 et, d'autre part, en utilisant le fait que la fonction de visibilité est nulle excepté à l'époque de la dernière diffusion η^* . On a donc pour la contribution du monopôle :

$$\Delta_l^{(S)}(k, \eta_0) \sim \Delta_0(\eta^*) j_l(k(\eta_0 - \eta^*)) \sim \Delta_0(\eta^*) j_l(k\eta_0) \quad (1.185)$$

ce qui conduit à :

$$C_l \sim \int d^3k P_A \Delta_0^2(\eta^*) j_l^2(k\eta_0) \quad (1.186)$$

Cette relation indique que la fonction $j_l^2(k\eta_0)$ représente la contribution du mode k au multipôle l . La figure 1.6 montre la forme de la fonction $j_l^2(x)$. Cette fonction est maximale pour $l \simeq k \eta_0$. La position du premier maximum, ou pic, dans le spectre de puissance C_l correspond à :

$$l_1 \simeq k_1 \eta_0 \simeq \sqrt{3} \pi \frac{\eta_0}{\eta^*} \sim 200 \quad (1.187)$$

La figure 1.6 montre cependant que si la contribution au multipôle $l = l_1$ provient principalement du mode k_1 , les modes $k > k_1$ interviennent également. La valeur de C_l est donc aussi sensible aux petites échelles.

La relation que nous avons obtenue entre échelle angulaire l et perturbation associée au mode k suppose que l'espace soit plat. Elle n'est plus valable si l'espace est courbe. En effet, l'angle

sous-tendu par une certaine échelle $\lambda \sim 1/k$ sur la couche de dernière diffusion dépend de la nature de la géométrie de l'Univers, car la trajectoire des photons dépend de la courbure de celui-ci. Cet effet est illustré sur la figure 1.7. L'angle sous-tendu par une fluctuation de taille donnée est plus grand dans un Univers fermé que dans un Univers ouvert. L'action des effets de projection, associés à la nature de la trajectoire des photons, sur le spectre de puissance angulaire est illustrée sur la figure 1.10.

Regardons maintenant l'influence des baryons. L'équation 1.178 conduit à :

$$(1 + R)\ddot{\Delta}_0 + \frac{k^2}{3}\Delta_0 = -\frac{k^2}{3}(1 + R)\Psi \quad (1.188)$$

La vitesse du son correspond alors à :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1 + R)}} \quad (1.189)$$

Compte-tenu des conditions initiales, la température effective $\Delta_0 + \Psi$ s'écrit :

$$\Delta_0(\eta) + \Psi = \frac{1}{3}(1 + 3R)\Psi \cos(kr_s) - R\Psi \quad (1.190)$$

Les baryons modifient donc la dynamique des oscillations. L'inertie des baryons, via le terme R , induit un déplacement du point d'équilibre de l'oscillateur. Les phases de compression (associées aux maxima) sont alors amplifiées par rapport aux phases de raréfaction (minima). Cet effet est illustré sur la figure 1.8. L'amplitude des oscillations est amplifiée d'un facteur $(1+3R)$. Notons enfin que les baryons diminuent la vitesse du son. La taille de l'horizon acoustique est donc

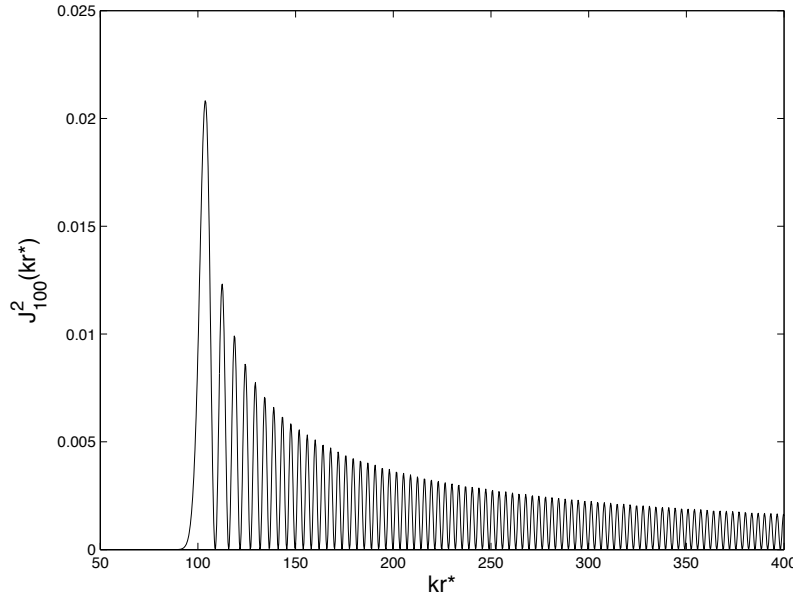


FIG. 1.6 – La fonction j_l^2 correspond au carré de la fonction de Bessel j_l . On note que $j_l^2(kr^*)$ est maximale pour le mode k tel que $kr^* = l$, avec ici $l=100$. Le fait que la fonction $j_l^2(kr^*)$ soit piquée vers $kr^* = l$ permet de relier le mode k à l'échelle angulaire l .

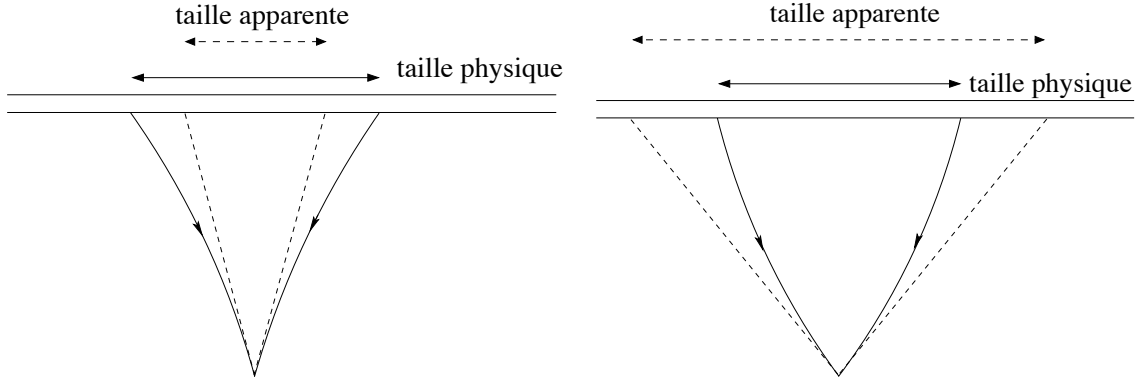


FIG. 1.7 – Influence de la courbure de l'Univers sur la taille des anisotropies du CMB. La nature de la géométrie de l'Univers change la trajectoire des photons et donc la taille apparente des objets éloignés.

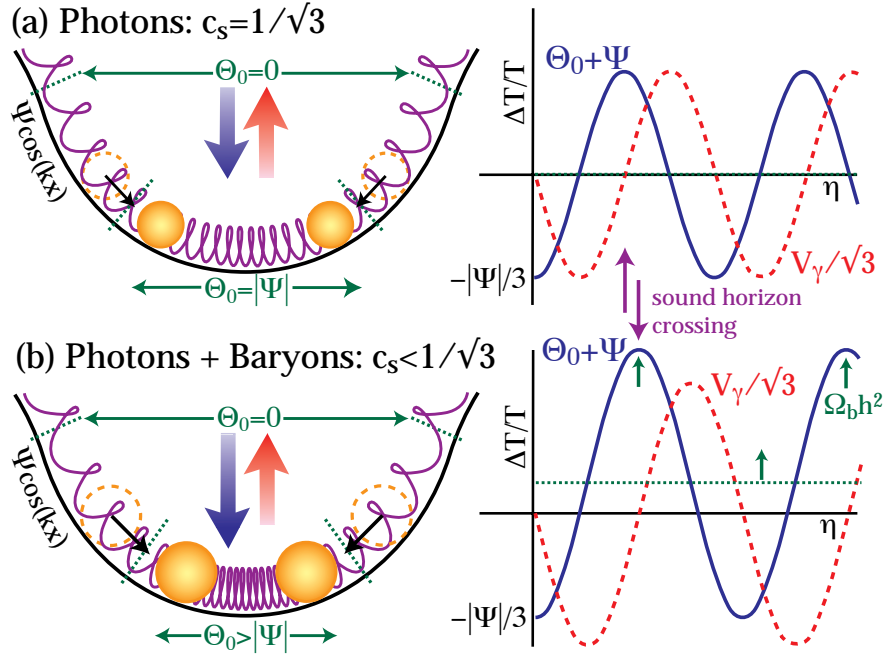


FIG. 1.8 – Figure issue de [13] illustrant l'influence des baryons sur les oscillations du plasma primordial. Les baryons déplacent le niveau moyen des oscillations ce qui amplifie les pics impairs par rapport aux pics pairs. La variation de température notée Δ_0 dans le texte correspond à Θ_0 sur la figure.

plus petite, ce qui déplace la position des pics du spectre C_l vers les valeurs de l plus élevées. L'influence des baryons sur le spectre de puissance angulaire est représentée sur la figure 1.10.

La figure 1.10 montre que le spectre de puissance est atténué aux petites échelles angulaires.

Cet effet est lié à la diffusion des photons lors du découplage. Aux échelles correspondant au libre parcours moyen des photons, la diffusion des photons génère de la viscosité. Cette dernière amortit les oscillations du fluide. Le terme de viscosité est en fait proportionnel au quadrupôle. C'est également le quadrupôle qui génère la polarisation. L'échelle associée à la diffusion k_d correspond au moment de la recombinaison [14] à $k_d\eta^* \simeq 10$. L'atténuation des oscillations commence donc au niveau du troisième pic.

La contribution du terme dipolaire $\Delta_1(\eta^*)$ est liée à la vitesse du fluide (équation 1.173). Cette dernière peut donc s'interpréter comme un effet Doppler dû à la vitesse du fluide. Elle se déduit de l'équation 1.175 et s'écrit :

$$\Delta_1(\eta) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{1+3R}{\sqrt{1+R}} \Psi \sin(kr_s) \quad (1.191)$$

Les oscillations correspondantes sont en quadrature avec celles associées au terme monopolaire, et de moyenne nulle. L'amplitude des oscillations du terme dipolaire est plus faible d'un facteur $\sqrt{3(1+R)}$. Avec une valeur de R proche de 0,6 à la recombinaison⁹. L'amplitude du terme dipolaire est alors environ 2,2 fois plus faible que celle du terme monopolaire.

Pour finir, considérons l'influence des potentiels Ψ et Φ sur les oscillations. Ces derniers évoluent en fait en fonction du temps. On a vu, section 1.2.2, que pour les modes qui entrent dans l'horizon pendant la période de domination de radiation, les potentiels tendent à s'annuler. Cette évolution modifie la dynamique des oscillations via l'équation 1.178 pour le monopôle. Les modes commençant à osciller lors de la domination de la radiation sont soumis à un potentiel

⁹On a $R = (3\rho_b)/(4\rho_{rad}) = (3\Omega_b h^2)/(4\Omega_{rad} h^2)$. On vérifie que l'on a, à l'époque de la recombinaison, $R^* \simeq 30\Omega_b h^2 \simeq 0,6$

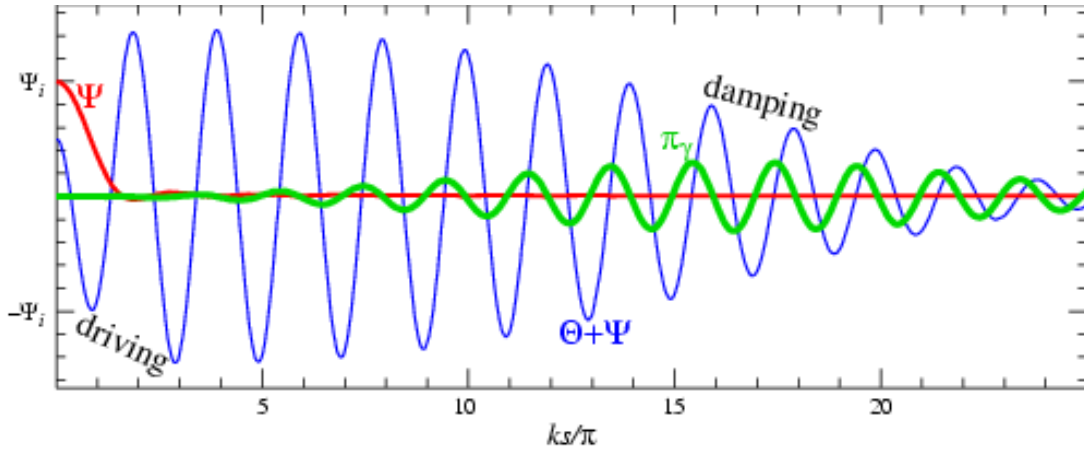


FIG. 1.9 – Cette figure illustre l'influence de l'évolution du potentiel (en rouge) sur les oscillations du plasma, ainsi que l'effet de la diffusion des photons au moment de la recombinaison. Le potentiel influe sur la première phase de compression, mais plus sur les phases suivantes, ce qui amplifie l'amplitude des oscillations. La décroissance des oscillations est générée par les contraintes anisotropes (viscosité, en vert sur la figure) induites par la diffusion des photons. La figure est issue de la référence [14].

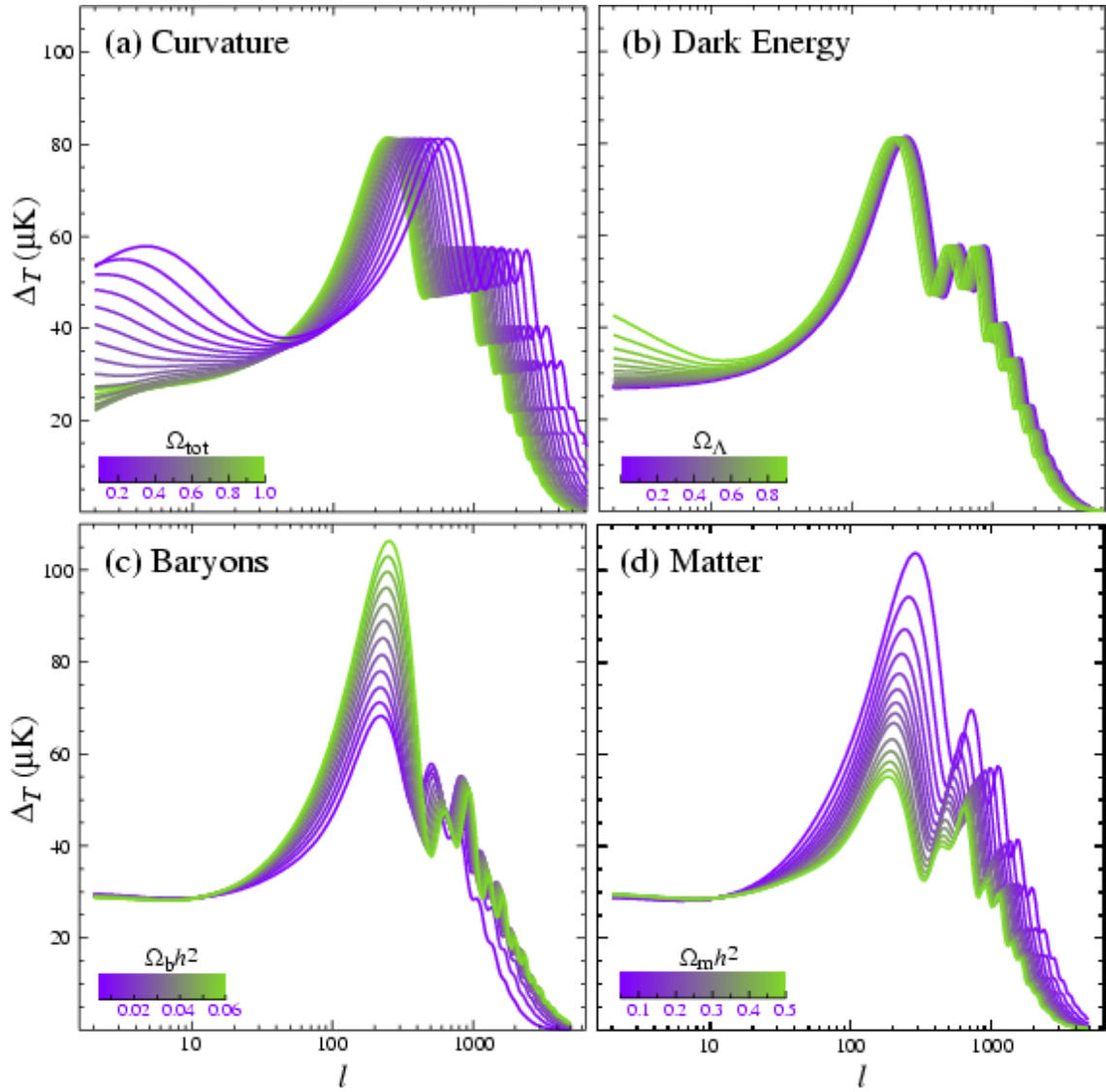


FIG. 1.10 – Les différentes figures montrent l'effet des paramètres Ω_{tot} , Ω_{Λ} , $\Omega_m h^2$ et $\Omega_b h^2$ sur la forme du spectre de puissance angulaire. Les paramètres du modèle correspondent à $\Omega_{tot}=1$, $\Omega_{\Lambda}=0,65$, $\Omega_m h^2=0,147$, $\Omega_b h^2=0,02$, $n=1$. Sur chacune de ces figures, un seul paramètre varie à la fois, les trois autres restant fixés. Ainsi, sur la figure (a), on fait varier Ω_{tot} , mais les valeurs de Ω_{Λ} , $\Omega_m h^2$ et $\Omega_b h^2$ restent fixées. La figure est extraite de la référence [14].

décroissant. La gravitation agit donc sur la première compression, mais n'agit plus sur la phase de détente suivante. L'amplitude des oscillations est donc amplifiée. Ce phénomène est représenté sur la figure 1.9. Cet effet d'amplification concerne essentiellement les modes entrant dans l'horizon avant l'égalité matière-radiation. Il est donc sensible à la valeur de la densité de matière noire. En effet, une densité de matière faible retarde l'époque de l'égalité matière-radiation. Ce retard implique une amplification de modes relatifs à des échelles de plus en plus grandes, et donc une contribution aux premiers pics du spectre puissance angulaire de plus en plus importante.

Les anisotropies générées au moment de la recombinaison sont appelées anisotropies primaires. Les effets qui se produisent après la recombinaison sur le trajet des photons sont appelés anisotropies secondaires. Par exemple, le terme de source $e^{-(\kappa_0 - \kappa)} (\dot{\Psi} - \dot{\Phi})$ de l'équation 1.172 indique que les variations de potentiel le long de la trajectoire vont modifier les spectres de puissance. Cette contribution particulière est appelée effet Sachs-Wolfe intégré. Il se comprend de la façon suivante. Les photons gagnent de l'énergie lorsqu'ils sont soumis à un potentiel gravitationnel (blueshift). Lorsqu'ils sortent du potentiel, ils perdent exactement la même énergie (redshift). Cependant, si le potentiel diminue entre temps, le redshift gravitationnel ne compense plus le gain d'énergie dû au blueshift. Les photons gagnent donc de l'énergie. On distingue deux types de contributions :

- Après la recombinaison, la densité d'énergie de radiation n'est pas négligeable, même si la densité d'énergie est dominée par la matière. Aussi, le potentiel gravitationnel continue à décroître pour les modes plus petits que la taille de l'horizon. L'effet Sachs-Wolfe intégré associé est appelé effet Sachs-Wolfe intégré précoce (early Integrated Sachs-Wolfe effect). Cet effet se manifeste essentiellement par un gain de puissance autour du premier pic.
- Dans les modèles d'Univers avec constante cosmologique (et/ou avec courbure), la densité d'énergie finit par être dominée par celle-ci. On montre alors que le potentiel n'est plus constant. L'effet Sachs-Wolfe intégré associé est appelé effet Sachs-Wolfe intégré tardif (late Integrated Sachs-Wolfe effect).

La sensibilité du spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB aux paramètres cosmologiques fait du CMB une source d'information exceptionnelle. Cependant, il existe des combinaisons de paramètres correspondant à des formes similaires de spectre de puissance. Les informations apportées par la polarisation du CMB lèvent en partie ces dégénérescences. C'est en particulier le cas pour le paramètre n_s , l'indice spectral des perturbations scalaires, et τ la profondeur optique :

- Une augmentation de n_s induit plus de puissance dans la partie du spectre associée aux petites échelles. Cela se traduit donc pour le CMB par une augmentation de puissance à haut l .
- La profondeur optique τ est liée à la probabilité $e^{-\tau}$ pour qu'un photon ne subisse pas de diffusion entre η et η_0 . On peut alors considérer que l'amplitude des anisotropies est proportionnelle à $e^{-\tau}$. L'effet de τ se traduit donc par une baisse de puissance aux échelles associées à la diffusion des photons au moment du découplage, c'est à dire les petites échelles angulaires.

Les variations de n_s et τ ont donc tendance à se compenser. Cette compensation induit une dégénérescence entre ces paramètres. Cette dernière peut être levée via la mesure de la polarisation. La réionisation, engendrée par la formation des premières étoiles, induit en effet une polarisation supplémentaire du CMB, qui se traduit par un pic de puissance dans les spectres angulaires de polarisation. La figure 1.11 montre l'effet de la réionisation sur le mode de polarisation B. La position de ce pic dépend de l'époque de réionisation et son amplitude de la profondeur optique.

Pour finir, signalons que la polarisation du CMB peut mettre en évidence la présence éventuelle des ondes gravitationnelles primordiales, générées lors de la phase d'inflation. En effet, le mode de polarisation B n'est généré que par la partie tensorielle des perturbations primordiales, c'est à dire les ondes gravitationnelles. La partie scalaire des perturbations ne peut produire que

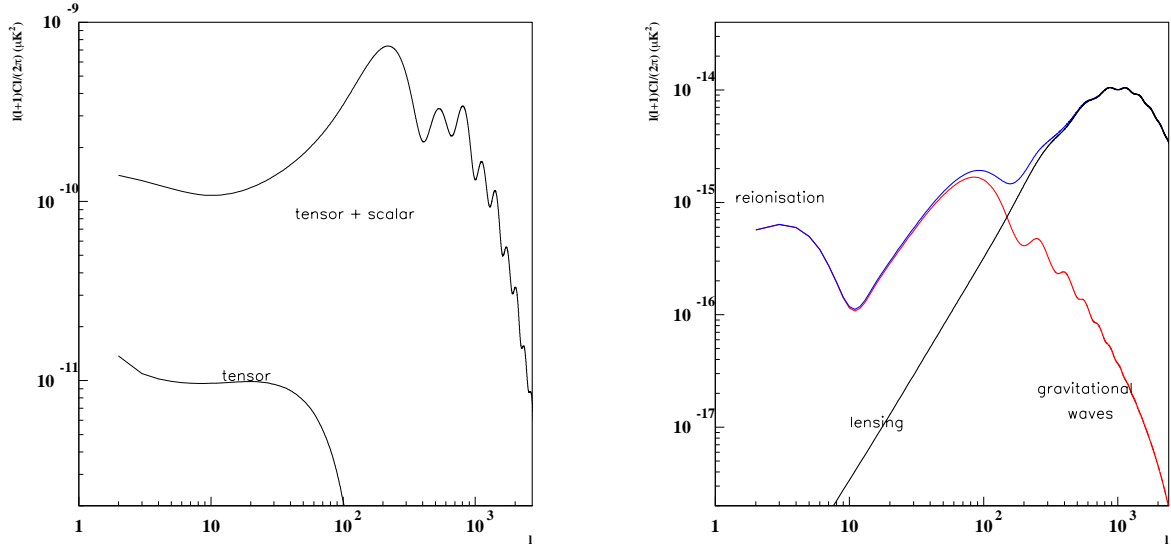


FIG. 1.11 – La figure de gauche montre la contribution tensorielle au spectre de puissance de température. La figure de droite représente les différentes contributions au mode B de polarisation. La courbe noire correspond à la puissance provenant de l'effet de lentille gravitationnelle induit par les perturbations situées sur la trajectoire des photons du CMB. La courbe rouge représente la contribution des ondes gravitationnelles. La remontée, à basse valeur de l , est produite au moment de la réionisation. La contribution des ondes gravitationnelles aux spectres de puissance est proportionnelle à l'échelle d'énergie de l'inflation.

des modes de polarisation de type E. Les choses sont en fait compliquées par les effets de lentille gravitationnelle qui mélangent les modes E et B. Le mode de polarisation B est donc produit d'une part par les ondes gravitationnelles et d'autre part par les effets de lentille gravitationnelle. La contribution typique de ces deux sources est représentée figure 1.11.

La détection de la contribution des ondes gravitationnelles au mode B constituerait la première mise en évidence expérimentale de celles-ci. De plus, la détermination de l'amplitude du spectre des perturbations tensorielles, via le mode B, permet également de contraindre l'échelle d'énergie associée à l'inflation.

Bibliographie

- [1] J. G. Bartlett New Astron.Rev. 43 (1999) 83-109
- [2] L. Bergstrom, A. Goodbar, *Cosmology and particle Astrophysics*, Wiley.
- [3] E. Bertschinger, *Cosmological perturbation theory and structure formation*, COSMOLOGY 2000, Conference Proceedings.
- [4] A.D. Dolgov, *Neutrino in cosmology*, astro-ph/0202122.
- [5] R. Durrer, *The theory of CMB anisotropies*, astro-ph/0109522.
- [6] M. Doran, astro-ph/0302138.
- [7] S. Eidelman *et al.* , Phys. Lett. B 592
- [8] K. Enqvist *et al.* , Nucl.Phys. B484 (1997) 403-418
- [9] Fixsen *et al.* , Astrophys. J. **473** (1996) 576.
- [10] Juan Garcia-Bellido, hep-ph/0004188.
- [11] A. J. S. Hamilton and M. Tegmark, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 330 (2002) 506
- [12] Q. Ho-Kim, P.X Yem *Elementary Particles and their Interactions*, Springer-Verlag, 1998
- [13] W. Hu, Lect.Notes Phys. 470 (1996) 207
- [14] W. Hu and S. Dodelson, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. 2002
- [15] W. Hu and N. Sugiyama, astro-ph/9407093
- [16] G. Jungman Microwave Background, Physics of the spectrum
- [17] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Frontiers In Physics Series (Vol. No. 69).
- [18] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological inflation and Large scale structure*, Cambridge University Press.
- [19] J. Lesgourgues, Thèse de Doctorat, 1998, Université de Tours.
- [20] D. H. Lyth, astro-ph/9303019.
- [21] C-P Ma, E. Bertschinger, Astrophys. J. **455** (1995), astro-ph/9506072.
- [22] M. Maltoni *et al.* , Phys.Rev. D68 (2003) 113010
- [23] V.F Mukhanov, H.A. Feldman and R.H. Brandenberger, Physics Reports, **215** (1992).
- [24] T. Padmanabahn, *Structure formation in the Universe*, Cambridge University Press, 1999
- [25] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999
- [26] P. Peebles *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993
- [27] J. Rich, *Fundamentals of Cosmology*, Springer-Verlag, 2001
- [28] D.N. Spergel *et al.* , 2003, ApJS, 148, 175
- [29] M. White and W. Hu, Astron.Astrophys. 321 (1997) 8-9
- [30] M. Zaldarriaga and U. Seljak, Phys. Rev. D **55** (1997) 1830

Chapitre 2

Archeops

Sommaire

2.1	Mesure des anisotropies du CMB	47
2.1.1	Principe	47
2.1.2	Contraintes liées à la mesure du spectre de puissance angulaire	48
2.2	Contexte expérimental	49
2.3	Objectifs scientifiques	49
2.4	Description générale	51
2.5	Stratégie de balayage	51
2.6	Aspect instrumental	52
2.6.1	Optique froide	52
2.6.2	Bolomètres	53
2.6.3	Cryostat	55
2.7	Résultats	58
2.8	Expériences spatiales	60
2.8.1	WMAP	60
2.8.2	Planck	60

2.1 Mesure des anisotropies du CMB

2.1.1 Principe

Le but des expériences CMB est de mesurer le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB afin de contraindre les valeurs des paramètres cosmologiques. La route classique qui permet d'obtenir le spectre de puissance à partir des données instrumentales est commune à toutes les expériences. Elle se compose principalement de deux étapes clés : la fabrication de cartes du ciel et l'extraction de ces cartes du spectre de puissance angulaire C_l . Les contraintes sur les paramètres cosmologiques se déduisent alors des C_l .

Toutefois dans le cadre d'expériences comme Planck et Archeops, dont les instruments de mesure balayent le ciel en cercles, il est possible d'utiliser une autre approche pour extraire le spectre de puissance [1]. Cette dernière est basée sur l'utilisation du spectre de puissance par cercle Γ_m . Ce dernier est en effet relié au spectre de puissance angulaire. Cette approche ne sera pas développée dans cette thèse. On pourra consulter sur ce point l'article [1] et les références qui s'y trouvent.

Le signal correspondant aux anisotropies ne représente que $10^{-3}\%$ du signal du CMB. Les détecteurs reçoivent les signaux de toutes les différentes sources observées (essentiellement galactiques) : poussière, rayonnement synchrotron, CMB ... Le CMB lui-même n'étant qu'une source parmi les autres. De plus, s'ajoutent aux signaux proprement dits différents parasites : bruits, dérives thermiques. On comprend donc aisément que la mesure des anisotropies du CMB soit une tâche techniquement difficile. Cela explique notamment que la première détection de celles-ci effectuée par l'instrument DMR du satellite CMB ne date que de 1992.

Les expériences sont conçues pour d'une part minimiser les effets systématiques et d'autre part être capables de séparer les différentes composantes du signal. Concrètement, la réduction des effets systématiques a lieu en utilisant les redondances. En moyennant les mesures d'une zone du ciel observée plusieurs fois, le rapport signal sur bruit augmente. Cependant, avoir une redondance importante implique d'observer souvent la même zone. Pour les expériences ballon, dont la durée est limitée à quelques jours au plus, la redondance implique d'avoir une couverture du ciel réduite, et donc de renoncer à mesurer le spectre correspondant aux grandes échelles angulaire (bas l). Nous discutons ce point technique plus en détail dans la partie suivante.

2.1.2 Contraintes liées à la mesure du spectre de puissance angulaire

Pour estimer le spectre de puissance d'une carte de température du CMB, deux méthodes alternatives sont possibles. La première méthode consiste à déterminer la fonction de corrélation angulaire à deux points dans l'espace réel, puis à en déduire la valeur du spectre de puissance associée [15]. La seconde méthode, plus couramment employée, consiste à utiliser les coefficients a_{lm} du développement en harmoniques sphériques de la carte. Puis, le spectre de puissance angulaire est estimé à partir de ces coefficients :

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}|^2 \quad (2.1)$$

Les coefficients a_{lm} sont des complexes. La relation 2.1 permet de construire un estimateur, \hat{C}_l , de la valeur *vraie* du spectre de puissance C_l . On montre (voir chapitre 5) que cet estimateur \hat{C}_l est une variable aléatoire qui suit une loi de χ^2 à $(2l+1)$ degrés de liberté. La variance σ_l^2 de cet estimateur est telle que $\sigma_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1}$. Lorsque l'on tient compte du bruit, de la résolution angulaire et de la couverture incomplète du ciel, la variance s'écrit :

$$\sigma_l^2 = \frac{2}{(2l+1)f} \left(C_l + (\sigma_{pix}\theta_{pix})^2 e^{l^2\sigma_b} \right)^2 \quad (2.2)$$

où f est la fraction de ciel couverte, σ_{pix} la sensibilité par pixel, θ_{pix} la taille du pixel, et σ_b^2 est la variance du lobe. On peut écrire de façon plus explicite :

$$\theta_{pix}^2 = \frac{4\pi f}{N_{pix}}, \quad N_{pix} \text{ est nombre de pixels} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{pix}^2 = \frac{s^2}{t_{pix}}, \quad t_{pix} \text{ est la durée d'observation par pixel} \quad (2.4)$$

$$t_{pix}N_{pix} = t_{obs}, \quad t_{obs} \text{ est la durée de l'expérience} \quad (2.5)$$

Le terme s désigne la sensibilité de l'expérience, et correspond au niveau de bruit. Pour une expérience comme Archeops, on s'attend ¹⁰ à avoir pour un bolomètre à 143 GHz, qui est le

¹⁰La façon dont on peut quantitativement estimer cette valeur sera donnée dans la section relative aux bolomètres.

canal le plus sensible au CMB, $s \simeq 100 \mu K.s^{1/2}$. Essayons maintenant d'estimer les conditions nécessaires pour mesurer le premier pic du spectre de puissance, ainsi que sa partie à bas l dans les conditions d'une expérience comme Archeops. Le but est d'obtenir les ordres de grandeur caractéristiques d'une expérience de ce type. La taille des pixels de la carte réalisée limite la valeur maximale de l pour laquelle le spectre de puissance est déterminé. La taille minimale des pixels de la carte est elle-même déterminée par le lobe du faisceau. Commençons par déterminer la couverture du ciel f nécessaire. A grande échelle angulaire, le terme de bruit peut être négligé (on peut prendre des pixels suffisamment gros) dans 2.2. On a alors :

$$\sigma_l \simeq \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f}} C_l \quad (2.6)$$

En imposant $C_l \sim \sigma_l$, on arrive pour $l=2$ à $f \sim 0,2$.

Pour mesurer le premier pic dans le spectre, il faut parvenir à aller jusqu'à $l=300$. L'extension angulaire associée à cette valeur correspond à $\theta \simeq 180/l \simeq 40'$. Pour Archeops, la taille du lobe est inférieure à $10'$. La variance dans 2.2 est dominée par le bruit par pixel. On peut alors écrire :

$$\sigma_l \simeq \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f}} (\sigma_{pix} \theta_{pix})^2 \simeq \sqrt{\frac{2}{(2l+1)f}} \frac{s^2}{t_{obs}} 4\pi f \quad (2.7)$$

En prenant comme critère $\sigma_l \sim C_l$ pour $l = 300$, avec $l(2l+1)C_l/(2\pi) \simeq 2000 (\mu K)^2$, on obtient (pour un bolomètre) :

$$t_{obs} \sim 6 - 7h \quad (2.8)$$

2.2 Contexte expérimental

On peut distinguer deux familles d'expériences, exploitant chacune une technologie différente. Les expériences récentes de mesure interférométrique utilisent des radiomètres couplés avec des HEMT (high electron mobility transistors). C'est le même type de détecteur employé par DMR. Ces expériences (DASI, CBI ...) ont pu mesurer le spectre de puissance angulaire à très haute valeur de l . Les autres expériences utilisent comme détecteurs des bolomètres. Cette technologie est plus récente. Les bolomètres doivent être refroidis à très basse température à l'aide d'un cryostat pour obtenir la sensibilité requise.

Les expériences utilisant des bolomètres sont pour la plupart des expériences ballon. L'ensemble du dispositif instrumental est envoyé à haute altitude à l'aide d'un ballon stratosphérique pour s'affranchir des effets d'atmosphère. Les expériences au sol sont gênées par les perturbations induites par l'atmosphère. Elles bénéficient par contre d'une plus grande durée d'observation.

Le domaine angulaire couvert par l'ensemble de ces expériences correspond plutôt aux grandes valeurs de l . Aucune ne possède une zone d'observation suffisamment étendue pour atteindre la partie à bas l du spectre. Le tableau 2.1 regroupe une liste (non exhaustive!) d'expériences ayant déjà publié leurs résultats en 2002. La figure 2.1 montre les mesures de C_l issues de ces expériences. On note qu'il n'y a pas de mesures dans la zone située entre les points de COBE-DMR et le début du premier pic.

2.3 Objectifs scientifiques

Archeops est une expérience ballon de mesure des anisotropies du CMB. C'est une expérience internationale, principalement européenne, menée sous la responsabilité de A. Benoît du

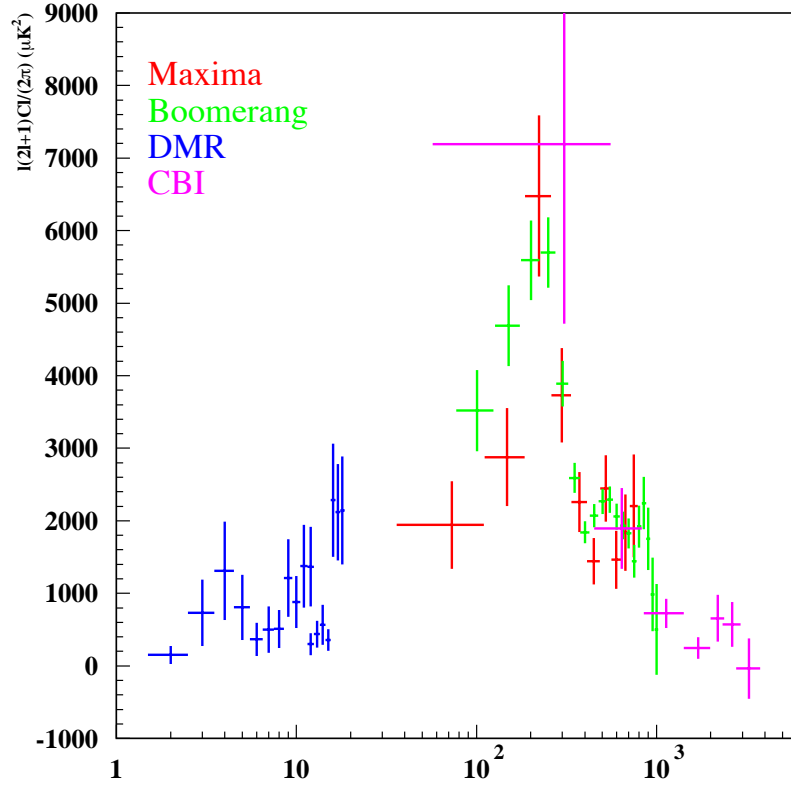


FIG. 2.1 – Spectres de puissance angulaire mesurés par différentes expériences en 2002. Un des objectifs scientifiques d'Archeops était de combler le manque de données à faible valeur de l et ainsi faire le lien entre les mesures de COBE et celles des expériences contemporaines à 2002.

Expérience	Technologie	Année	l_{min} l_{max}	type	polarisation
DMR	radiomètre	1992	2-20	satellite	non
Maxima	bolomètre	1998-99	50-700	ballon	non
Boomerang	bolomètre	1997	25-1050	ballon	oui
DASI	radiomètre	1999	100-900	interféromètre	oui
ACBAR	bolomètre	2001	60-2700	sol	oui
CBI	radiomètre	2002	300-3000	interféromètre	non

TAB. 2.1 – Caractéristiques de quelques expériences de mesures des anisotropies du CMB

CRTBT de Grenoble (Centre de Recherche sur les Très Basses Températures). Cette expérience a été motivée par deux objectifs scientifiques :

- Le premier objectif consiste à mesurer le spectre de puissance angulaire des anisotropies du CMB. Les expériences contemporaines à Archeops ont mesuré le spectre de puissance à

partir du premier pic. Archeops a été conçu pour faire le lien entre la partie à bas l (grande échelle angulaire) du spectre de puissance angulaire mesuré par DMR ($l < 30$) et la partie à plus grand l (petite échelle angulaire) couverte par les expériences plus récentes ($l > 150$).

- Le second objectif est de tester l'instrumentation et les techniques d'analyse qui seront utilisées pour la mission Planck. En effet, Archeops présente de nombreuses similarités avec l'instrument Planck-HFI : bandes d'observation à 143, 217, 353 et 545 GHz, bolomètres, électronique de mesure, optique froide, stratégie de balayage en cercles ...

D'autre part, Archeops a observé la Galaxie à une résolution inégalée dans cette gamme spectrale. Les détecteurs polarisés à 353 GHz permettent également d'étudier la polarisation de la Galaxie. Les données correspondantes sont donc intéressantes d'un point de vue astrophysique, au sens où elles déterminent les caractéristiques des composantes galactiques. Du point de vue de la physique du CMB, ces informations seront utiles pour séparer le signal CMB des signaux galactiques.

Archeops a effectué un vol technique en juillet 1999 (départ de Trapani, en Sicile) et deux vols scientifiques (départ de Kiruna, Suède) en janvier 2001 (vol KS1) et février 2002 (vol KS3). Les résultats scientifiques actuellement publiés ont été obtenus à partir des données du vol KS3 de février 2002. La collaboration Archeops a publié la première version du spectre de puissance angulaire extrait de ces données en décembre 2002. L'expérience acquise avec les vols précédents a été déterminante pour la réussite du vol KS3 d'Archeops. Une deuxième version du spectre, obtenue en utilisant plus de bolomètres, est en préparation.

2.4 Description générale

La description de l'instrumentation d'Archeops est donnée en détail dans la référence [5]. Nous ne donnerons ici qu'un aperçu du dispositif de mesure. La figure 2.2 représente l'ensemble du dispositif instrumental utilisé par Archeops. Archeops possède un télescope grégorien hors axe composé de deux miroirs. Le diamètre du miroir primaire permet d'obtenir une résolution supérieure à 10 minutes d'arc dans les bandes spectrales utilisées (143, 217, 353 et 545 GHz). Archeops observe le ciel en effectuant des balayages circulaires. Pour cela, un moteur entraîne la nacelle à une vitesse d'environ 2 tours par minute. Les détecteurs parcourent alors sur le ciel une bande circulaire d'environ 50 degrés d'ouverture. Le déplacement du ballon par rapport à la voûte céleste, induit par la rotation de la Terre, permet de couvrir en une nuit une large portion du ciel. Pour bénéficier de conditions d'observation favorables, Archeops a volé au moment de l'hiver arctique. Les lancements ont été effectués par le CNES depuis la station suédoise d'Esrange (située près de la ville de Kiruna). La figure 2.3 montre la trajectoire suivie par la nacelle lors du vol KS3.

2.5 Stratégie de balayage

La stratégie de balayage d'Archeops est similaire à celle prévue pour le satellite Planck. Archeops observe le ciel par cercles successifs. Le déplacement induit par la rotation de la Terre assure, tour après tour, une couverture du ciel de plus en plus large, voir figure 2.4. Les tours sont effectués en moyenne en 30 secondes. Le déplacement de la Terre correspond à une rotation

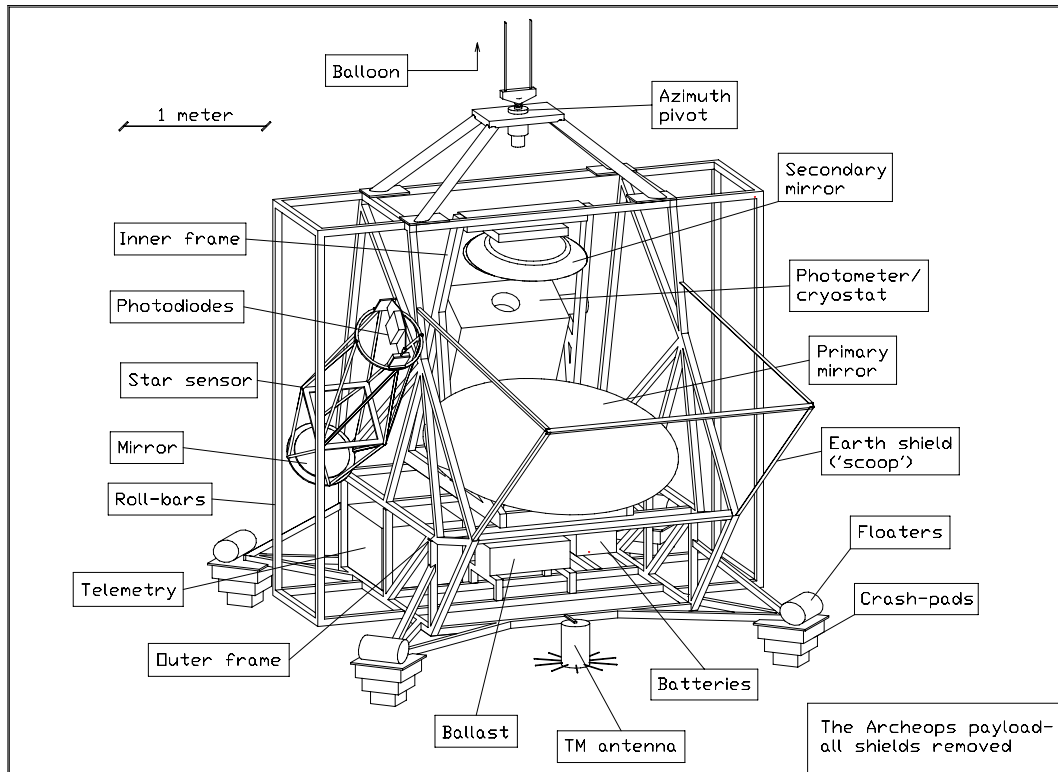


FIG. 2.2 – Nacelle d'Archeops.

de 15° en 1 heure. Le déplacement entre deux tours successifs est donc d'environ $7,5'$. Avec ce type de balayage, un vol de 24h conduit à une couverture du ciel de l'ordre de 35%. On notera, figure 2.5, que la redondance n'est pas homogène.

2.6 Aspect instrumental

2.6.1 Optique froide

La chaîne de détection est constituée d'un ensemble de trois cornets canalisant le rayonnement jusqu'au bolomètre. Le même type de configuration sera utilisé par Planck HFI. Les deux cornets, placés dos-à-dos, sont reliés par un guide d'onde. Le guide d'onde joue d'une part le rôle de filtre passe-haut, et d'autre part sélectionne les modes pouvant se propager. Un jeu de lentilles placées aux extrémités des deuxième et troisième cornets assure un excellent couplage entre les cornets et permet de focaliser le rayonnement incident à travers les filtres passe-haut situés entre les cornets. Le troisième cornet guide finalement le rayonnement vers le bolomètre. Les caractéristiques du lobe dépendent de façon critique de la forme du cornet d'entrée. L'utilisation de cornets corrugués, pour les canaux à 143 et 217 GHz, permet de réduire significativement le niveau des lobes secondaires.

2.6.2 Bolomètres

Archeops utilise des bolomètres développés par les laboratoires JPL/Caltech pour Planck HFI. Ces bolomètres doivent avoir un temps de réponse suffisamment rapide pour permettre l'observation du ciel à la résolution souhaitée. Planck effectue un balayage circulaire ($\sim 360^\circ$) en environ 1 minute. Pour atteindre, une résolution de $5'$, il faut donc que les bolomètres aient un temps de réponse meilleur que 14 ms. Cette valeur est très faible pour ce type de détecteurs. Les bolomètres développés pour Planck utilisent un maillage métallique en forme de toile d'araignée (d'où leur nom de *spider web bolometer*) pour absorber le rayonnement incident. Cette absorption provoque une élévation de température proportionnelle à la puissance incidente. L'élévation de température est mesurée à l'aide d'une thermistance placée au centre de la toile. La géométrie en toile d'araignée permet d'obtenir une petite capacité calorifique, la masse du dispositif étant faible, et de minimiser l'interaction avec les rayons cosmiques. La faible capacité calorifique du maillage induit un temps de réponse rapide.

La sensibilité des bolomètres est caractérisée par une grandeur appelée NEP (Noise Equivalent Power). La NEP correspond à la plus petite puissance incidente nécessaire pour avoir un rapport signal sur bruit de 1. Comme le niveau de bruit est proportionnel à la racine carrée de la bande passante, la NEP est donnée par rapport à une bande passante de 1 Hz, et donc s'exprime en $W.Hz^{-1/2}$. On peut l'exprimer également en $W.s^{1/2}$, mais comme un temps d'intégration de

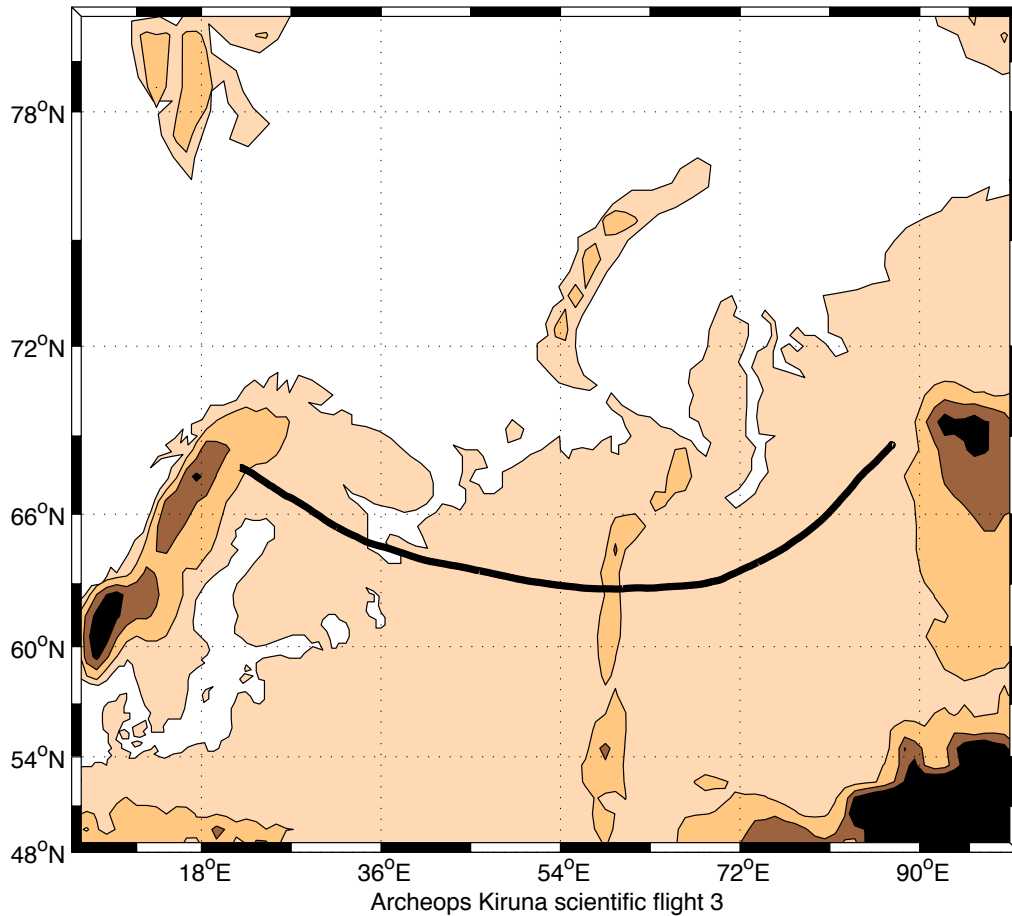


FIG. 2.3 – Trajectoire d'Archeops lors du scientifique KS3.

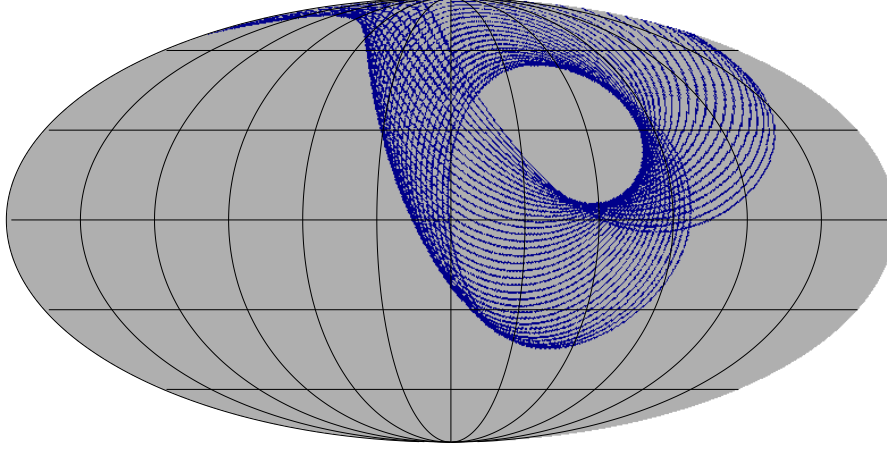


FIG. 2.4 – La rotation de la Terre sur elle-même induit un déplacement des cercles effectués par Archeops. Sur cette figure, seul 1 cercle sur 40 a été représenté afin d'améliorer la lisibilité.

1s correspond à une largeur de 0,5 Hz, la valeur correspondante est plus petite d'un facteur $\sqrt{2}$ dans ce cas.

La NEP totale correspond à la somme quadratique des différentes sources de bruits : bruit de photons, bruit de phonons, bruit Johnson... Le niveau de bruit, excepté celui correspondant au bruit de photons, augmente avec la température de fonctionnement du bolomètre. Le bruit de photons correspond aux fluctuations de puissance du rayonnement incident. Il s'écrit sous la forme [14] :

$$NEP_{ph}^2 = 2 \int h\nu Q_\nu d\nu + 2 \int \frac{c^2}{mU\nu^2} Q_\nu^2 d\nu \quad (2.9)$$

$$\simeq 2A\Omega B(\nu_m, T)\eta\epsilon \left(h\nu_m + \frac{c^2 B(\nu_m, T)}{2\nu^2} \eta\epsilon \right) \Delta\nu \quad (2.10)$$

Q_ν est la puissance détectée, m est le nombre d'états de polarisation, $c^2/(U\nu^2)$ la cohérence spatiale du faisceau. On obtient la deuxième ligne en utilisant :

$$Q_\nu = UB(\nu, T)\eta\epsilon \simeq A\Omega B(\nu, T)\eta\epsilon \quad (2.11)$$

B est la loi de Planck, η l'efficacité du détecteur, ϵ l'émissivité de la source, A la surface du télescope et Ω l'angle solide associé au rayonnement incident. Le premier terme de 2.10 correspond aux fluctuations statistiques du nombre de photons. Le deuxième terme est dû aux corrélations entre photons. Les valeurs de bruit de photons issus de l'environnement thermique proche (télescope) et du CMB sont comparées dans le tableau 2.2. La sensibilité des détecteurs est optimale si la composante dominante du bruit correspond au bruit de fond de photons. Les bolomètres doivent être refroidis à très basse température pour réduire la contribution des autres sources de bruit.

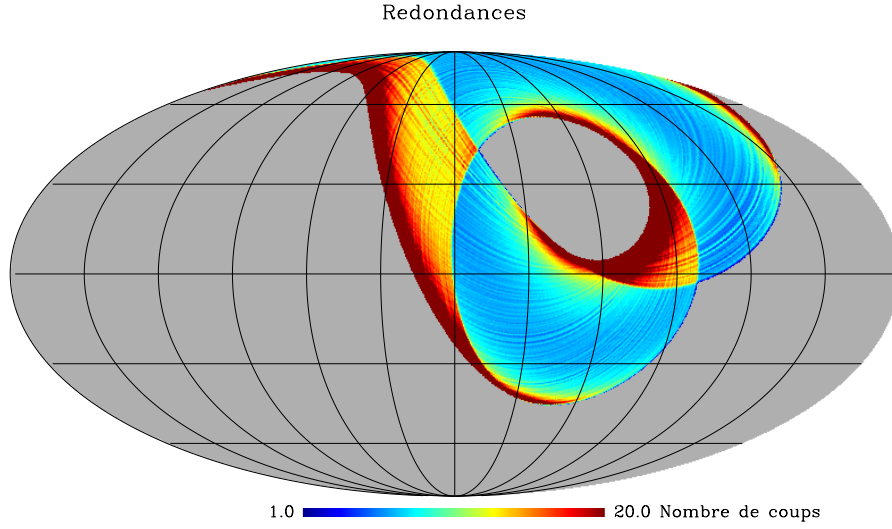


FIG. 2.5 – Carte des redondances (nombre de coups par pixel) du vol KS3 d'Archeops

Fréquence (GHz)	NEP_{photon} en $10^{-17} W.Hz^{-1/2}$			
	Archeops		Planck	
	CMB	fond	CMB	fond
143	0,7	1,3	0,4	0,3
217	0,6	2,0	0,4	0,6
353	0,6	4,7	0,4	1,4

TAB. 2.2 – Valeurs de NEP (par bolomètre) pour les expériences Planck et Archeops. Les bruits de photons associés au CMB et à l'environnement thermique (miroir) ont été explicités.

La sensibilité peut être également caractérisée à l'aide de la NET (Noise Equivalent Temperature). La NET est reliée à la NEP via la relation :

$$NEP = \sqrt{2\eta} \frac{\partial P_{\text{cmb}}}{\partial T_{\text{cmb}}} NET \quad (2.12)$$

où P_{cmb} est la puissance incidente du rayonnement du CMB. Le calcul de la NET pour Archeops dans la bande à 143 GHz compte tenu des valeurs du tableau 2.2 donne $NET \simeq 100 \mu K.s^{1/2}$. Expérimentalement, l'analyse du spectre du signal du bolomètre permet d'estimer le niveau de bruit en $V.Hz^{-1/2}$. La calibration des données permet de trouver la sensibilité en $\mu K.s^{1/2}$ correspondante (Noise Equivalent Temperature).

2.6.3 Cryostat

Pour atteindre les basses températures nécessaires pour utiliser le plein potentiel des bolomètres, Archeops utilise un cryostat à dilution développé au CRTBT [10]. Le cryostat d'Archeops utilise une technique de dilution $^3\text{He}/^4\text{He}$ en circuit ouvert. La même technique de refroidissement sera utilisée pour l'instrument HFI du satellite Planck.

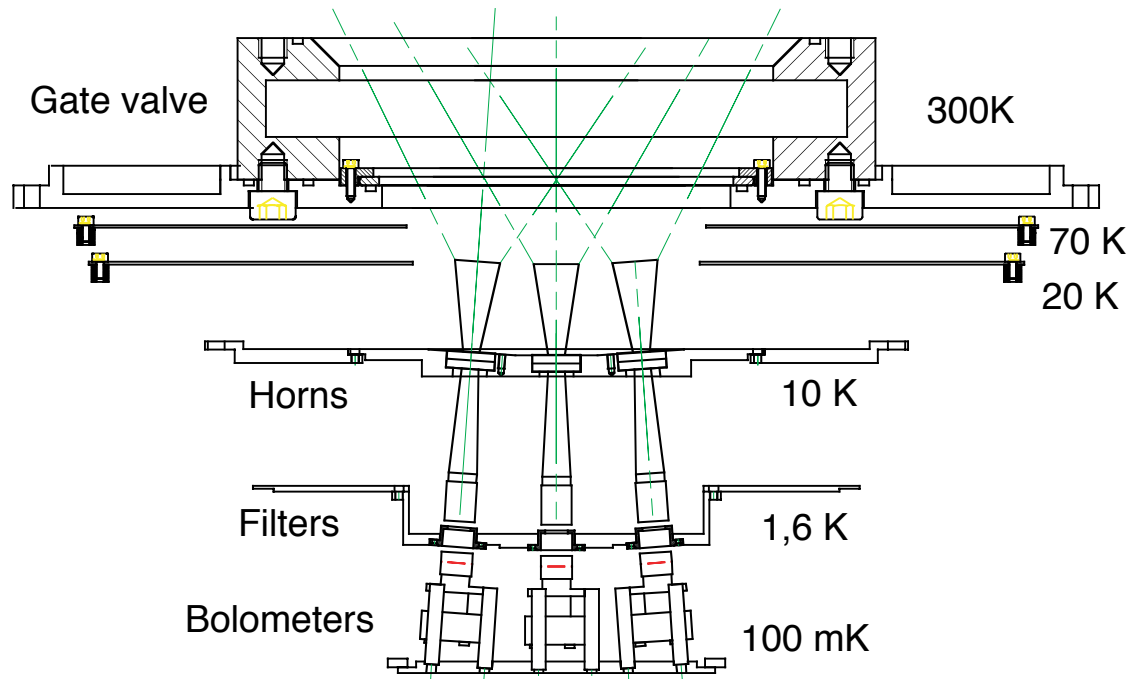


FIG. 2.6 – Configuration optique de la chaîne de détection.

voies	143 GHz	217 GHz	353 GHz	545 GHz
NEV ($nV.Hz^{-1/2}$)	16,0	12,3	20,5	12,1
Calibration ($\mu K/nV$)	8,2	28	139	746
NET ($\mu K.s^{1/2}$)	90	240	2000	6400

TAB. 2.3 – Sensibilités typiques par bolomètre mesurées pour le vol KS3.

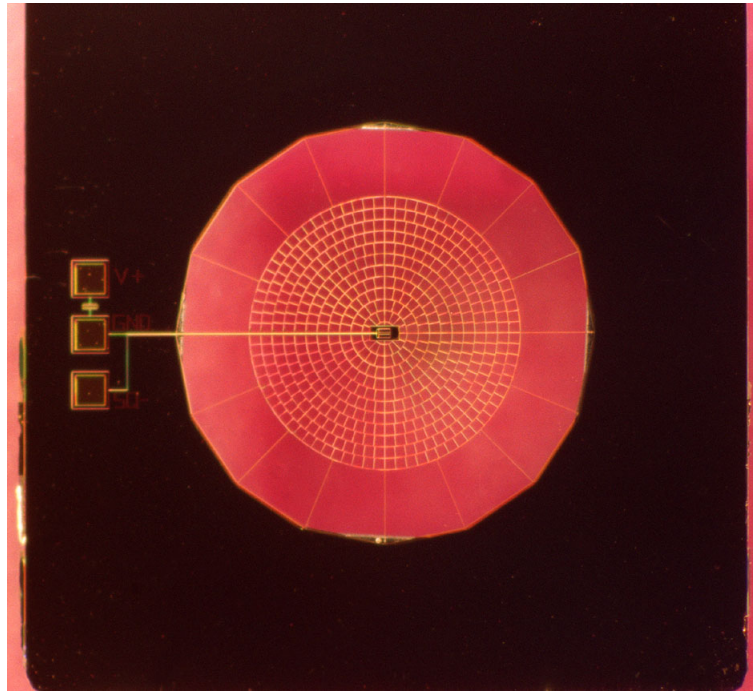


FIG. 2.7 – Bolomètre de type spiderweb développé au JPL/Caltech. On distingue nettement la forme en toile d'araignée du substrat absorbant.

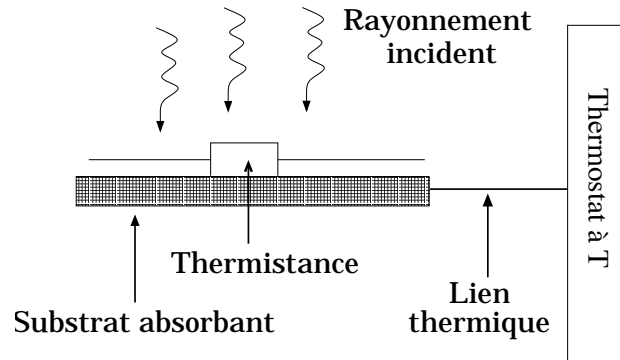


FIG. 2.8 – Principe de fonctionnement d'un bolomètre. Le rayonnement électromagnétique est absorbé par le substrat. Le réchauffement associé est mesuré à l'aide d'une thermistance. Le lien thermique assure l'évacuation de l'excès d'énergie vers le thermostat.

Le processus de refroidissement exploite les caractéristiques thermodynamiques de ^3He et de ^4He . A une température inférieure à 0,8K, le mélange $^3\text{He}/^4\text{He}$ se sépare en deux phases liquides, l'une riche en ^3He et l'autre riche en ^4He . Le refroidissement est obtenu en mélangeant ces deux phases. On peut comprendre intuitivement les choses de la façon suivante. L'hélium 4 est inerte et n'interagit pas avec les autres atomes ou molécules. Du point de vue thermodynamique, il se comporte comme du vide. Aussi, lorsque l'hélium 3 passe dans la phase riche en hélium 4, il dispose d'un volume effectif plus important, comme lors d'une détente. La spécificité du cryostat d'Archeops (et de celui prévu pour Planck) est d'opérer le mélange dans un tube capillaire. Cette

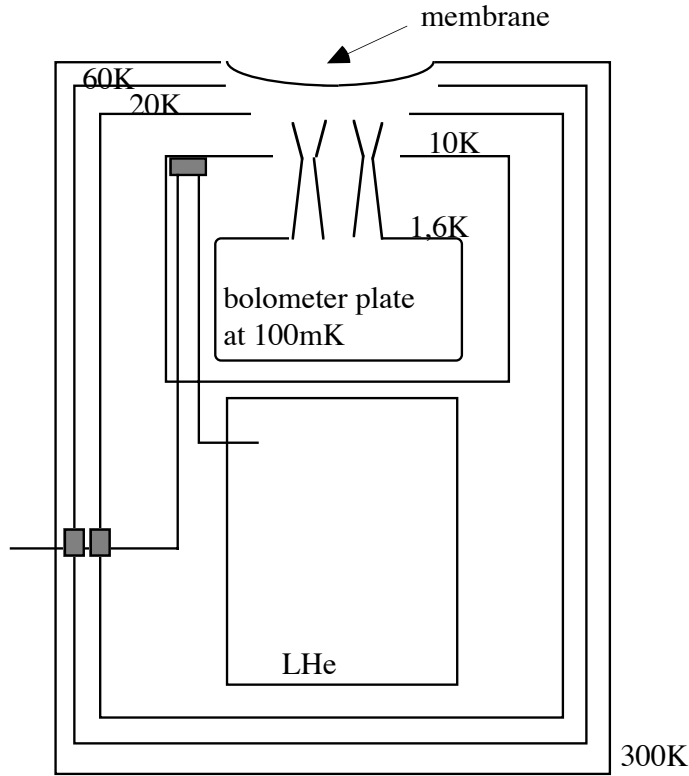


FIG. 2.9 – Coupe du cryostat d'Archeops.

dilution en cycle ouvert a été développée dans le cadre de Planck afin de réaliser un cryostat pouvant fonctionner en apesanteur [11].

L'étage à dilution est placé dans une enceinte située au-dessus d'un réservoir d'hélium liquide à 4,2K. Les cornets sont situés sur la face supérieure de l'enceinte. Cette enceinte est refroidie à 1,6K par détente Joule-Thomson du mélange $^3\text{He}/^4\text{He}$. Les bolomètres sont placés dans l'étage à dilution et sont refroidis à une température de 100mK. L'intérieur du cryostat nécessite un vide poussé pour que celui-ci fonctionne. Une trappe assure l'étanchéité, et est retirée lorsque la nacelle atteint la haute atmosphère à 40 km d'altitude ¹¹.

2.7 Résultats

La collaboration Archeops a publié le spectre de puissance angulaire extrait de ses données en octobre 2002 [6]. Les valeurs publiées sont issues de l'analyse des deux bolomètres ayant la meilleure sensibilité, 90 et 150 $\mu\text{K}\cdot\text{s}^{1/2}$, correspondant respectivement aux canaux à 143 et 217 GHz. Archeops a observé environ 30% de la voûte céleste. Seule la partie à haute latitude, supérieure à 30°, correspondant à 12,5% de la voûte céleste a été utilisée pour obtenir le spectre

¹¹Cependant, bien que la pression à cette altitude ne soit que de quelques dizaines de milliPascal, cette valeur est encore trop élevée pour l'enceinte du cryostat. C'est pourquoi une membrane en polypropylène, transparente aux ondes millimétriques, est utilisée pour maintenir l'isolation du cryostat.

Archeops KS3 CMB map

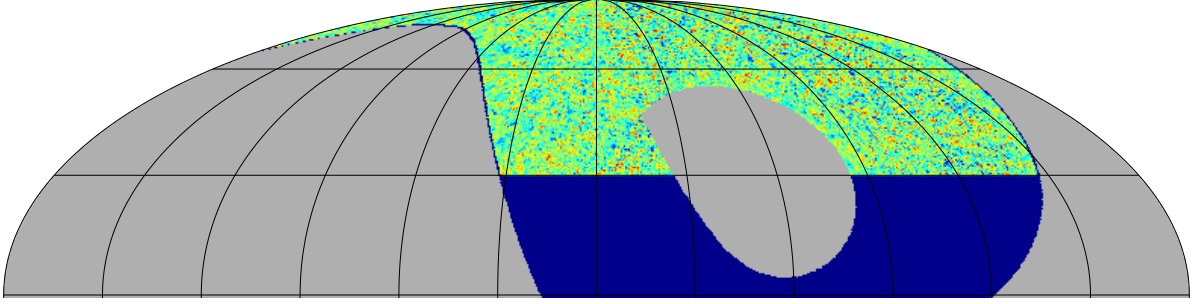


FIG. 2.10 – Carte CMB d'Archeops en coordonnées galactiques, centrées sur l'anticentre galactique, issue de [6]. Taille de pixel et lissage gaussien à 15'. Carte correspondant à la coaddition des deux bolomètres les plus sensibles.

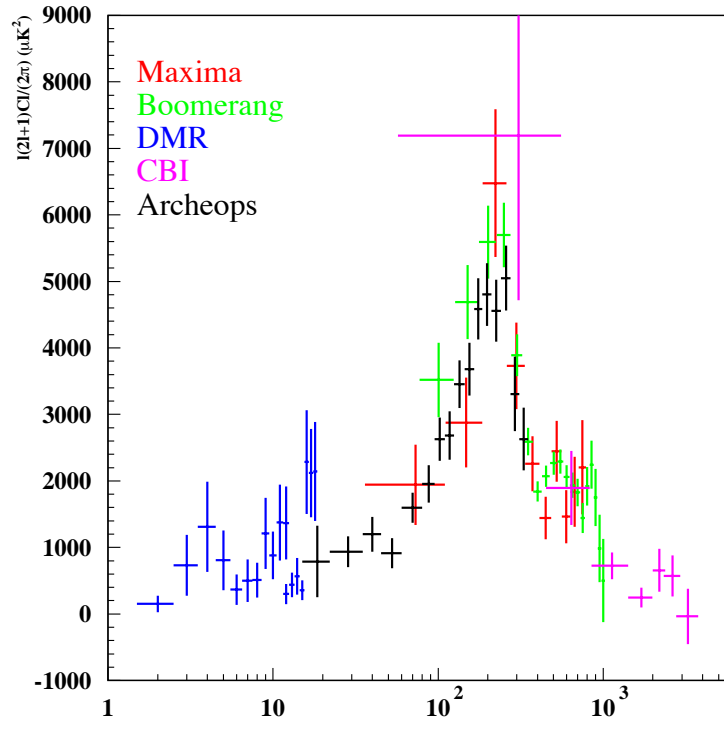


FIG. 2.11 – Spectre de puissance angulaire mesuré par Archeops.

de puissance afin d'éviter toute contamination par le signal galactique.

Archeops a obtenu la meilleure détermination du spectre de puissance entre $l=15$ et $l=350$ au moment de la publication de ses résultats. Archeops est la seule expérience non satellite à avoir mesuré la partie à bas l du spectre de puissance jusqu'au premier pic acoustique.

Les données d'Archeops ont permis d'améliorer les contraintes sur les paramètres cosmologiques [7], et en particulier de réduire d'un facteur deux l'incertitude sur la densité totale de l'Univers Ω et l'indice spectral du spectre des perturbations scalaires n_s . En utilisant la valeur de H_0 issues de mesures réalisées avec le télescope spatial Hubble (HST) et l'ensemble des données CMB de l'époque, on trouve $\Omega = 1,00^{+0,03}_{-0,02}$ et $n_s = 1,04^{+0,10}_{-0,08}$.

Des résultats scientifiques ont également été obtenus dans le domaine de la physique galactique. Archeops a en effet détecté pour la première fois la polarisation du rayonnement galactique à 343 GHz. Le niveau polarisation détecté est de 4 à 5 % sur les grandes échelles angulaires. La direction de la polarisation détectée met en évidence l'existence d'un champ magnétique cohérent parallèle au plan galactique et d'un mécanisme d'alignement des grains de poussière le long des lignes de champ [8].

Archeops est la première expérience ballon à utiliser un cryostat à dilution. La qualité des données obtenues sont en grande partie due à la capacité de refroidissement et la stabilité thermique du cryostat. Le succès de la mission valide les innovations techniques et technologiques relatives à Planck HFI.

2.8 Expériences spatiales

2.8.1 WMAP

WMAP est une expérience satellite américaine qui a été lancée en 2002. WMAP utilise, comme DMR, des radiomètres avec HEMT. La sensibilité de WMAP est cependant environ 50 fois plus grande et atteint 20 μ K par pixel. Comme DMR, WMAP a une très grande couverture du ciel (en fait le ciel complet moins la zone galactique), ce qui permet de mesurer la partie à très bas l du spectre. Les résultats de WMAP [2] [3] [4] publiés au début 2003 correspondent à une année de prise de données. WMAP a mesuré le spectre puissance C^T jusqu'à $l=800$ et a également mesuré pour la première fois la corrélation croisée TE jusqu'à $l=500$, voir figure 2.12.

La mise en évidence de la réionisation via la mesure de la corrélation TE permet en particulier à WMAP de bien contraindre l'indice spectral des perturbations scalaires n_s et la profondeur optique τ . Les mesures de WMAP ont montré d'une part que l'Univers est plat et d'autre part que le spectre de puissance primordial est invariant d'échelle.

Les données de WMAP, combinées avec les observations des grandes structures effectuées par 2dFGRS contraignent la contribution des neutrinos à la densité d'énergie de l'Univers. Cette contrainte impose la limite supérieure actuelle la plus forte sur la masse des neutrinos (voir la partie 1.1.4).

La mission WMAP a montré la formidable richesse des informations contenues dans la physique du CMB, tant dans le domaine de la cosmologie que dans celui de la physique des particules.

2.8.2 Planck

Planck (figure 2.13) est le satellite de l'ESA destiné à mesurer les anisotropies de température et de polarisation du CMB. Son lancement est prévu en 2007. Planck est composé de deux instruments de mesure (figure 2.14) : LFI (Low Frequency instrument) et HFI (High Frequency Instrument). Ces instruments sont chacun développés dans le cadre d'une collaboration internationale, menée par la France pour HFI et l'Italie pour LFI. Le développement de HFI, pour lequel l'IAS (Institut d'Astrophysique Spatiale d'Orsay) est maître d'œuvre, est supervisé par

J-L. Puget. Signalons au sein de la collaboration les responsabilités l'IN2P3¹² dans l'étalonnage de l'instrument et dans le développement de l'électronique embarquée, ainsi que celles de l'IAP (Institut d'Astrophysique de Paris) dans l'analyse des données.

LFI utilise la technologie radiomètre/HEMT et observera dans les bandes à 30, 44 et 77 GHz. HFI utilise des bolomètres de type spiderweb refroidis à 100 mK. HFI observera également la polarisation du CMB à l'aide PSB (Polarized Sensitive Bolometer). HFI utilisera 6 canaux de 100 à 850 GHz. Les six bandes spectrales de HFI et les trois bandes de LFI sont nécessaires pour effectuer la séparation du signal du CMB des avant-plans.

La sensibilité et la résolution angulaire de Planck permettront de mesurer le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température jusqu'à $l \simeq 2500$. La figure 2.15 montre la précision attendue sur la mesure du spectre de puissance par Planck. La précision ne sera limitée que par la variance cosmique¹³ à bas l et par la résolution angulaire à haut l . En ce sens, Planck représente le degré ultime de précision du spectre de puissance angulaire des anisotropies de température.

Planck pourra également mesurer la polarisation du CMB. La figure 2.15 illustre le degré de précision attendu sur la mesure des modes E et B. La mesure de la polarisation améliore d'une part la précision sur la détermination des paramètres cosmologiques. Typiquement, les données de Planck permettront de déterminer les paramètres cosmologiques avec une précision de l'ordre du pourcent. Nous discuterons de façon plus approfondie des perspectives de Planck dans le chapitre

¹²Les laboratoires de l'IN2P3 impliqués sont le LAL (Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, Orsay), le LPSC (Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Grenoble) et le PCC (laboratoire de Physique Corpusculaire et Cosmologie, Paris).

¹³voir chapitre 5

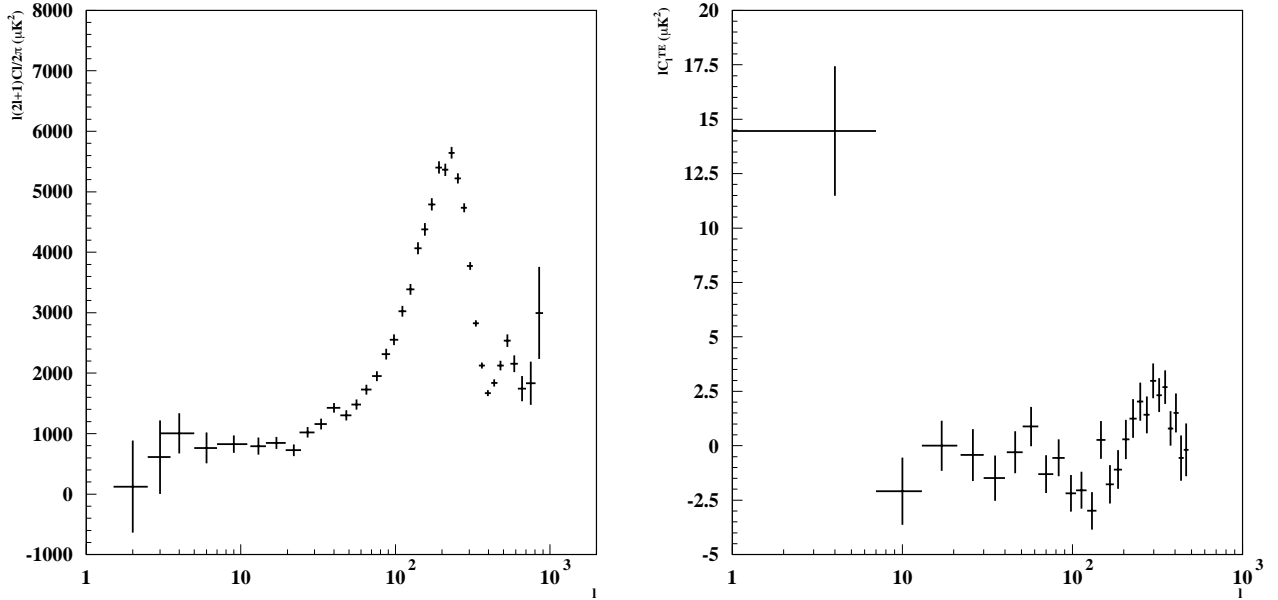


FIG. 2.12 – La figure de gauche montre le spectre de puissance angulaire C^T mesuré par WMAP en 2003. La figure de droite montre le spectre C^{TE} . La réionisation induit un pic de puissances aux basses valeurs de l (grandes échelles angulaires). Les caractéristiques de ce pic permettent de contraindre la profondeur optique τ et l'époque à laquelle la réionisation a eu lieu.

5. D'autre part, la détection (ou non) des modes B associés aux ondes gravitationnelles permettra de contraindre l'échelle d'énergie associée à l'inflation. L'amplitude du spectre des perturbations primordiales tensorielles est proportionnelle au potentiel d'inflation. Il en est donc de même pour les contributions tensorielles aux spectres de puissance angulaires. C'est pourquoi la détection des modes B de polarisation associés aux ondes gravitationnelles permet de contraindre l'échelle d'énergie associée à l'inflation. La possibilité pour Planck de détecter les ondes gravitationnelles est discutée dans les thèses de N. Ponthieu et de C. Rosset [13] [12]. On montre que Planck peut détecter la polarisation induite par les ondes gravitationnelles si l'échelle d'énergie de l'inflation est supérieure à $1,0 \cdot 10^{16}$ GeV. Les données actuelles [3] imposent $V^{1/4} < 3,3 \cdot 10^{16}$ GeV. La plage de détection de la contribution des ondes gravitationnelles au mode B de polarisation est donc assez réduite.

Planck pourra également mesurer l'effet Sunyaev-Zel'dovich (effet SZ) associé à plus de 10^4 amas de galaxies. L'effet SZ est une distortion du spectre du CMB provenant de la diffusion des photons du CMB par les électrons du gaz chaud situé dans les amas de galaxies. On distingue généralement deux types d'effets SZ :

- l'effet SZ thermique qui correspond à la diffusion Compton inverse sur les électrons du gaz chaud. Le spectre du CMB est alors modifié, correspond à un transfert de puissance autour de 217 GHz.
- l'effet SZ cinétique lié au décalage Doppler induit par le déplacement d'ensemble de l'amas par rapport au CMB. Cet effet a une amplitude plus faible que l'effet SZ thermique.

Les amas de galaxies altèrent via l'effet SZ les anisotropies primaires du CMB et en particulier le spectre de puissance angulaire à haut l . Les sources SZ doivent donc être extraites des cartes CMB. Les bandes spectrales de Planck ont été choisies notamment pour caractériser les sources SZ. L'étude de l'effet SZ est également un des objectifs scientifiques de Planck. L'effet SZ induit par

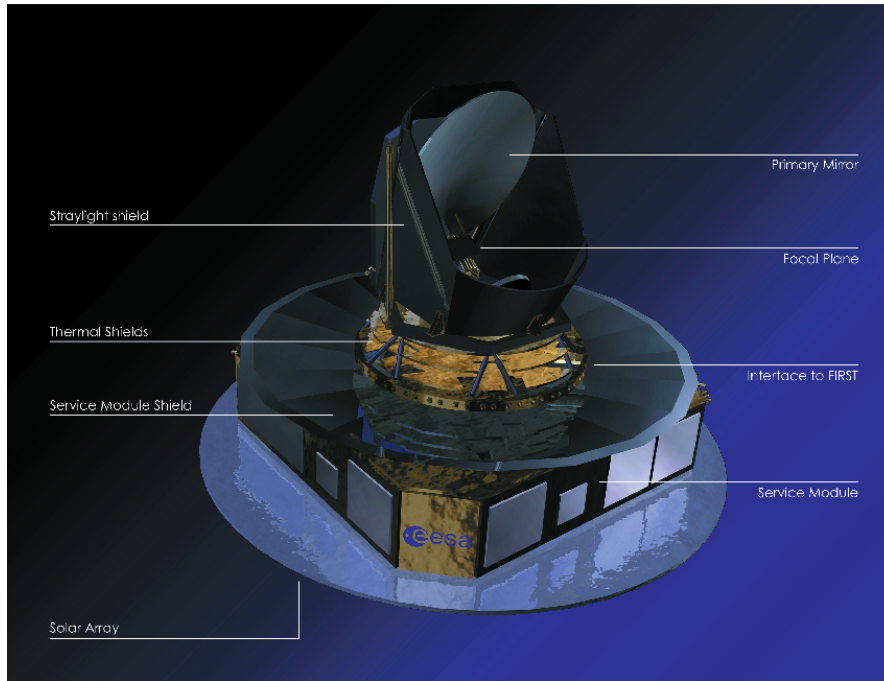
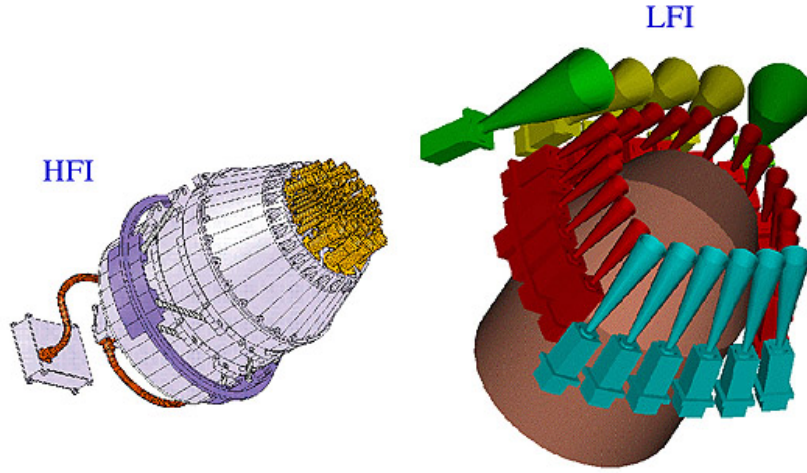


FIG. 2.13 – Vue d'artiste du satellite Planck

FIG. 2.14 – *Instruments LFI et HFI du satellite Planck*

les amas de galaxie est en effet un outil qui permet de contraindre les paramètres cosmologiques.

Fréquence (GHz)	100	143	217	343	545	857
Nombre de bolomètres	0	4	4	4	4	4
Nombre de bolomètres polarisés	8	8	8	8	0	0
Résolution angulaire	9,2	7,1	5,0	5,0	5,0	5,0
Sensibilité $\frac{\Delta T}{T}$ ($\mu K/K$)	2,8	2,2	4,8	15	157	6700

TAB. 2.4 – Caractéristiques de Planck HFI

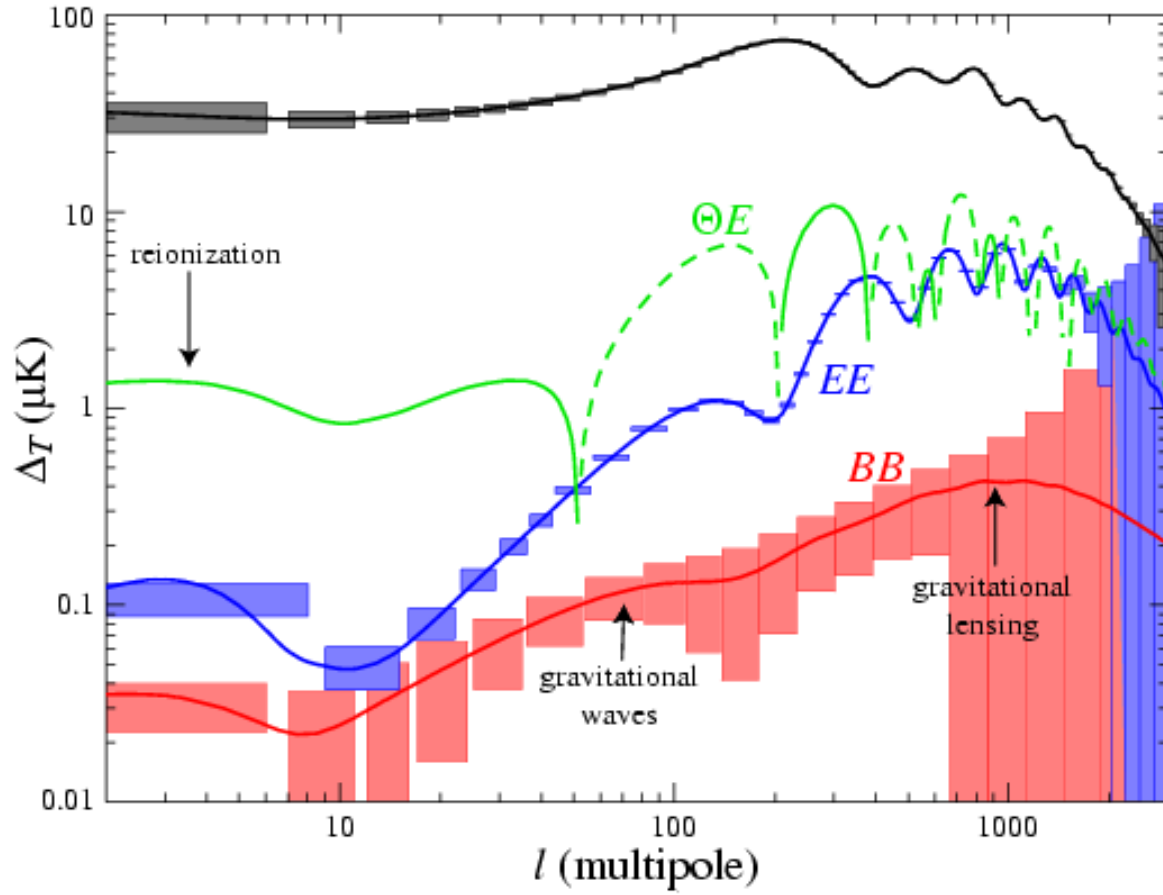


FIG. 2.15 – Précision de la mesure du spectre de puissance angulaire par Planck. Figure issue de [9].

Bibliographie

- [1] R. Ansari, S. Bargout, A. Bourrachot, F. Couchot, J. Haïssinski, S. Henrot-Versillé, G. Le Meur, O. Perdereau, M. Piat, S. Plaszczyński, F. Touze, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 343 (2003) 552
- [2] C.L. Bennett *et al.* , 2003, ApJS, 148, 1
- [3] D.N. Spergel *et al.* , 2003, ApJS, 148, 175
- [4] <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [5] Benoît *et al.* , *Archeops : A High Resolution, Large Sky Coverage Balloon Experiment for Mapping CMB Anisotropies*, Astroparticle Physics 17 (2002) 101-124.
- [6] Benoît *et al.* , *The Cosmic Microwave Background Anisotropy Power Spectrum measured by Archeops*, Astronomy and Astrophysics, 2003, Vol. 399 No.3 p. L19
- [7] Benoît *et al.* , *Cosmological constraints from Archeops*, Astronomy and Astrophysics, 2003, Vol. 399 No. 3 p. L5
- [8] Benoît *et al.* , *First Detection of Polarization of the Submillimetre Diffuse Galactic Dust Emission by archeops*, Astropart. Phys. 17 (2002) 101-124.
- [9] W. Hu and S. Dodelson, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. (2002)
- [10] A. Benoît, S. Pujol, 1994a Cryogenics, 34, 421
- [11] Karine Madet, Thèse de Doctorat, 2002, Université de Grenoble.
- [12] Nicolas Ponthieu, Thèse de Doctorat, 2003, Université de Grenoble.
- [13] Cyrille Rosset, Thèse de Doctorat, 2003, Université Paris VII.
- [14] J.M. Lamarre, Applied optics, Vol. 25, No. 6, 1986
- [15] I. Szapudi, S. Prunet, D. Pogosyan, A.S. Szalay and J.R.Bond, astro-ph/0010256

Chapitre 3

Reconstruction d'attitude dans l'expérience Archeops

Sommaire

3.1	Reconstruction d'attitude	68
3.1.1	Position du problème	68
3.1.2	Le senseur stellaire	68
3.2	Stratégie	69
3.2.1	Systèmes de coordonnées	69
3.2.2	Principe de la reconstruction	70
3.3	Première estimation du pointage	71
3.3.1	Période de rotation	71
3.3.2	Phase du senseur stellaire	73
3.3.3	Algorithme d'association étoiles-signaux	76
3.3.4	Améliorations de l'estimation du pointage	77
3.3.5	Étalonnage du senseur stellaire	78
3.4	Ajustement de la trajectoire	79
3.4.1	Interpolation de la trajectoire	79
3.4.2	Ajustement couplé	80
3.4.3	Résolution	82
3.5	Résultats	82
3.5.1	Analyse des résidus	82
3.5.2	Précision de la reconstruction	83
3.5.3	Pendulation	84
3.5.4	Reconstruction du plan focal	84
3.6	Conclusion	86

J'ai eu, au sein de la collaboration Archeops, la responsabilité, sous la direction de F. Couchot, de produire le pointage instrumental des différents vol d'Archeops. Cette partie décrit les moyens et les méthodes mis en œuvre pour mener à bien cette tâche.

3.1 Reconstruction d'attitude

3.1.1 Position du problème

La reconstruction d'attitude consiste à déterminer le pointage instrumental de l'expérience. La vitesse de rotation élevée de la nacelle, d'une dizaine de degrés par seconde, ne permet pas d'utiliser les matrices CDD employées usuellement. Un instrument spécifique, appelé senseur stellaire (SST), a donc été développé pour Archeops [1]. Il est constitué d'un télescope optique et d'une barrette de photodiodes. Pour faciliter la reconstruction, la nacelle est également équipée de 3 gyroscopes et d'un GPS. Le GPS donne les coordonnées et l'altitude de la nacelle. Les gyroscopes mesurent la vitesse de rotation de la nacelle autour ses axes principaux. La mesure de vitesse autour de l'axe de rotation est utilisée dans la boucle d'asservissement de la vitesse de rotation de la nacelle.

Du point de vue pratique, la détermination précise du pointage est délicate du fait de la pendulation du ballon. La longueur de la chaîne de vol, de l'ordre de 150 m, est suffisante pour qu'il existe un gradient de vitesse de vent. Ce différentiel et la nature turbulente des vents de haute altitude induisent un mouvement irrégulier de la nacelle.

L'obtention du pointage est une étape sensible de l'analyse des données. La qualité de celui-ci conditionne celle de l'analyse qui sera faite en aval. C'est pourquoi, au sein de la collaboration, deux reconstructions ont été réalisées indépendamment. J'ai effectué sous la responsabilité de F. Couchot l'une d'elles. C'est A. Benoît qui a effectué l'autre reconstruction, basée sur une approche différente du problème.

3.1.2 Le senseur stellaire

Il est constitué d'un télescope optique de 40 centimètres de diamètre au foyer duquel est placée une barrette de 46 photodiodes. L'axe de la barrette est placé perpendiculairement à la direction de balayage. La taille des photodiodes est 4 mm dans la direction de balayage sur 1 mm dans la direction orthogonale à laquelle correspond une zone du ciel de 7,6 arcminutes sur 1,9 arcminutes. Le senseur stellaire observe à chaque tour une zone du ciel correspondant à un anneau de $1,4^\circ$ d'épaisseur et de 50° d'ouverture. La sensibilité de l'instrument permet de détecter les étoiles jusqu'à magnitude 7. En moyenne, 200 étoiles sont détectées chaque tour.

Un logiciel extrait les candidats étoiles des signaux électriques délivrés par les photodiodes. Il fournit une liste de candidats étoiles caractérisés par

- le numéro d'échantillon du pic du signal.
- le numéro de la photodiode qui a vu le signal
- l'intensité du signal

La fréquence d'échantillonnage est de l'ordre de 150 Hz. Le numéro d'échantillonnage permet de repérer l'instant où une étoile est détectée. Le numéro de la photodiode permet de localiser celle-ci sur la barrette. L'intensité du courant du signal est liée à la magnitude de l'étoile correspondante. Elle est proportionnelle au logarithme du flux de l'étoile vue par la diode. La figure 3.1 montre les signaux associées aux étoiles les plus brillantes vues tout après tour par le senseur stellaire.

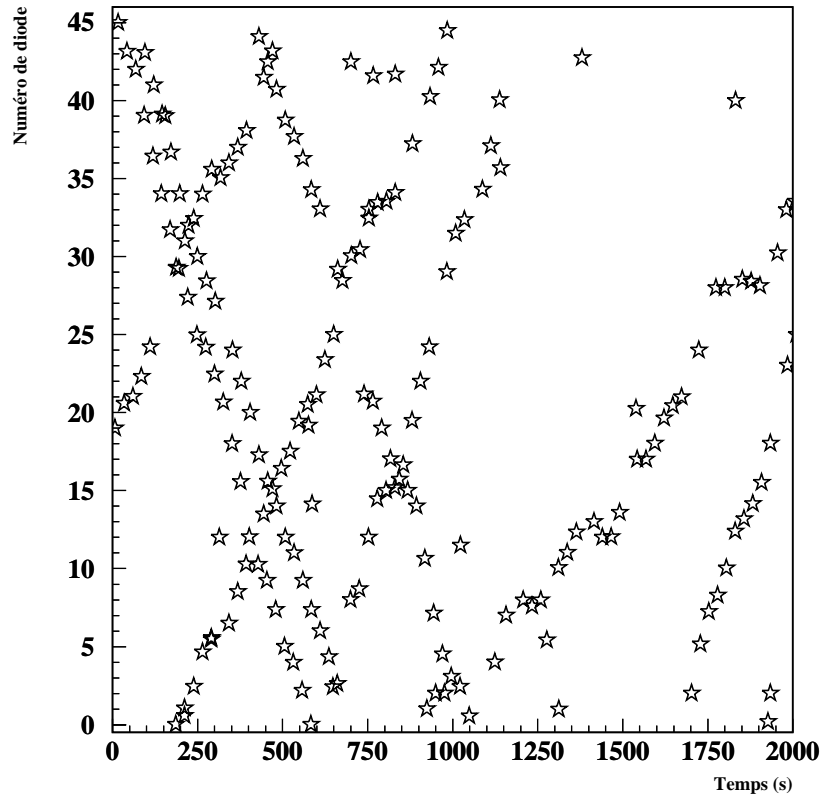


FIG. 3.1 – Évolution du numéro de diode en fonction du temps des signaux les plus intenses. La rotation de la voûte céleste et les balancements de la nacelle induisent un déplacement apparent des étoiles. Celles-ci sont vues tour après tour par des diodes différentes.

3.2 Stratégie

3.2.1 Systèmes de coordonnées

Les objets sont repérés sur la voûte céleste par leurs coordonnées équatoriales α et δ . Les données du senseur stellaire permettent de reconstruire naturellement les coordonnées du signal dans le repère lié à la nacelle. Ce dernier est formé par la direction de l'axe de rotation de la nacelle et, dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, la direction du Nord céleste. La direction d'une étoile est caractérisée par deux coordonnées, θ et φ . θ correspond à l'écart angulaire entre l'axe de rotation et la direction de l'étoile. La phase φ indique l'angle entre les projections, dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, des directions du Nord et de l'étoile considérée, comme indiqué sur la figure 3.2. Pour alléger l'écriture, j'appellerai φ la phase et θ la distance axiale. Du fait de la disposition de la barrette de photodiodes, le numéro de diode d'un candidat étoile est directement lié à la distance axiale. La nature des données du senseur stellaire nous amène donc naturellement à utiliser le repère lié à la nacelle.

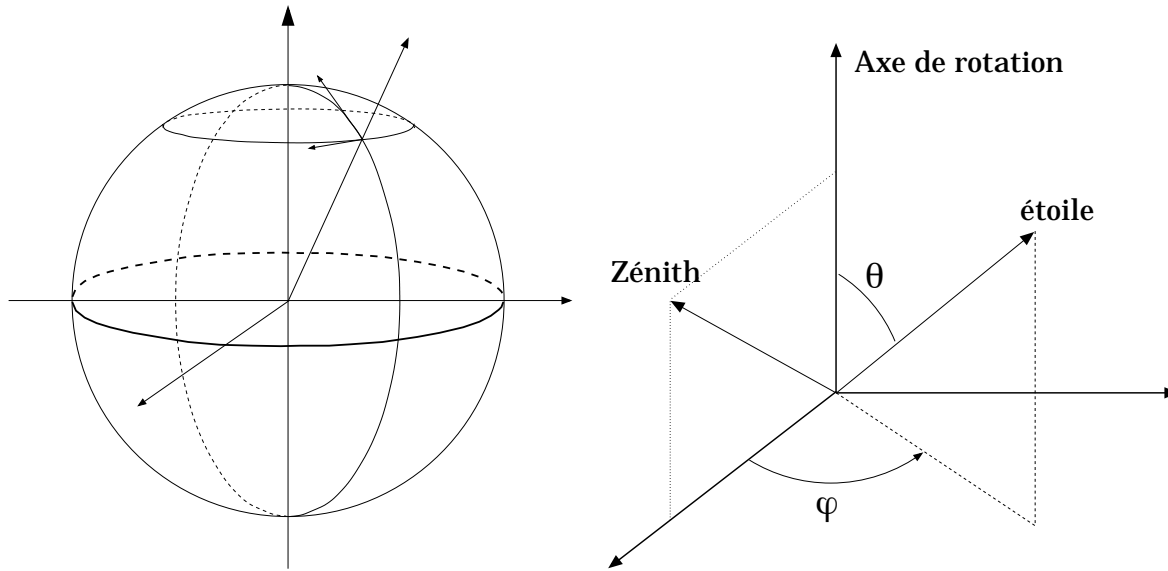


FIG. 3.2 – Représentation du système de coordonnées géocentriques et du système liée à la nacelle. Sur la figure de gauche, la verticale locale et l'axe de rotation sont confondus, ce qui n'est en général pas le cas du fait de la pendulation. Sur la figure de droite, le Zénith correspond au nord céleste. La direction d'une étoile est repérée par ses coordonnées φ et θ .

3.2.2 Principe de la reconstruction

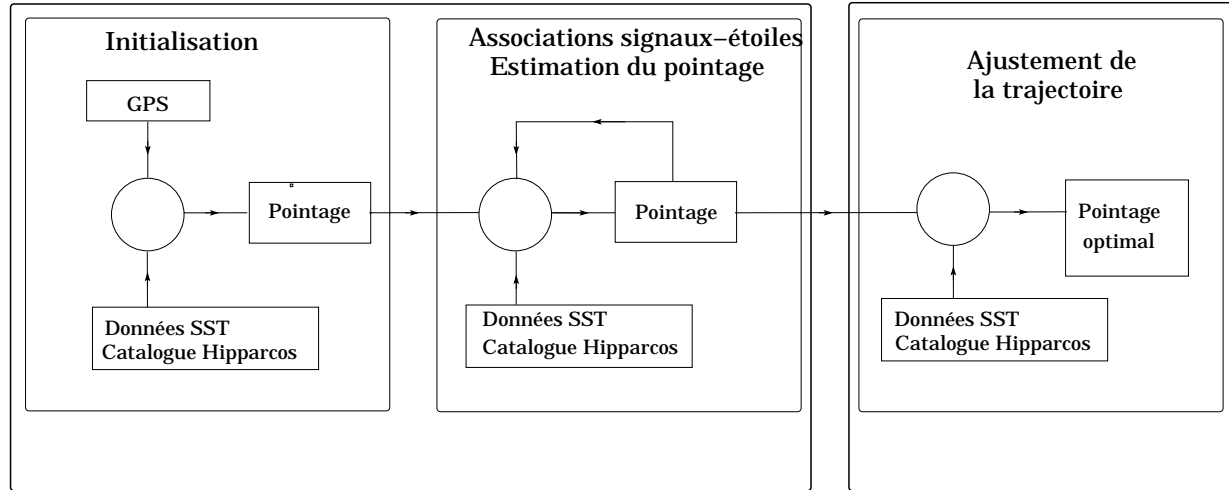


FIG. 3.3 – Principe de l'algorithme de reconstruction.

L'objectif du pointage est de fournir à chaque instant la direction de visée instrumentale. Dans notre approche du problème, cela revient à trouver la direction de l'axe de rotation de la nacelle $\{\alpha_p, \delta_p\}$ et la phase φ du senseur stellaire dans le repère local.

La reconstruction est basée sur la comparaison entre les données du SST avec un catalogue

d'étoiles spécifique, produit à partir du catalogue Hipparcos/Tycho. Ce catalogue indique la position des étoiles et leur magnitude dans quatre bandes spectrales. L'intensité du courant électrique associée à chaque étoile est alors estimée à partir de la réponse spectrale du SST [1] :

$$I_{photodiode} = f_{cal}(T)10^{-\frac{m_V}{2.5}} \quad (3.1)$$

m_V est la magnitude de l'étoile mesurée dans la bande V et $f_{cal}(T)$ un facteur de calibration dépendant de la température. Dans la suite, j'appellerai *signal* un candidat étoile dans la liste produite par le logiciel traitant les données du SST. Le terme *étoile* désignera un objet du catalogue d'étoiles. La détermination du pointage est obtenue en deux étapes représentées sur la figure 3.3 :

- ❑ La première étape consiste à identifier pour chaque signal l'étoile correspondante. Ces associations donnent un pointage pour chaque signal identifié. Le travail s'effectue en deux phases. On effectue une première estimation du pointage. Puis, cette estimation est améliorée en utilisant les associations signaux-étoiles.
- ❑ La deuxième étape consiste à déterminer le pointage à chaque instant, et non pas seulement au moment où un signal a pu être identifié. La trajectoire de la ligne de visée instrumentale sur le ciel doit donc être d'une part interpolée et d'autre part ajustée de façon à ce qu'elle soit optimale.

3.3 Première estimation du pointage

Pour comparer les directions des signaux et des étoiles, nous avons besoin de connaître la direction des signaux. Il faut donc disposer d'une première estimation du pointage, c'est à dire des variables $\{\alpha_p, \delta_p, \varphi\}$, pour reconstruire la direction des signaux. Les données GPS donnent la direction de la verticale du lieu où se trouve la nacelle. Cette direction coïncide avec celle de l'axe de rotation de la nacelle s'il n'y pas de pendulation. Le GPS donne donc une première estimation de la direction de l'axe de rotation.

Il ne reste plus qu'à trouver une estimation de la phase φ du SST pour obtenir un premier pointage. Cependant, il n'y a pas de mesure qui nous donne directement accès à la phase. Toutefois, celle-ci peut être construite par intégration à partir de la période de rotation.

3.3.1 Période de rotation

Le mouvement de la nacelle est décrit par rapport à la sphère céleste. C'est pourquoi nous définissons la période de rotation comme le temps écoulé entre deux détections successives de la même étoile. Chaque rotation prend environ 28 secondes. Le mouvement de rotation de la Terre induit un déplacement de l'axe de rotation d'environ 7' par tour. Chaque étoile peut donc être vue plusieurs fois de suite, tour après tour, par le senseur stellaire. Pour déterminer la période, il faut donc déterminer les intervalles séparant la détection de la même étoile consécutivement d'un tour à l'autre. Pour cela nous cherchons, pour chaque signal, les signaux vus le tour précédent possédant des caractéristiques similaires au signal considéré. Ces caractéristiques sont l'intensité électrique et le numéro de diode. Les différences de temps sont alors histogrammées. La valeur la plus probable de la période T est alors extraite successivement fraction de tour par fraction de tour.

Avant d'effectuer la recherche de période, les données du senseur stellaire doivent être optimisées. En effet, une étoile est susceptible d'être vue par plusieurs diodes voisines et donc générées

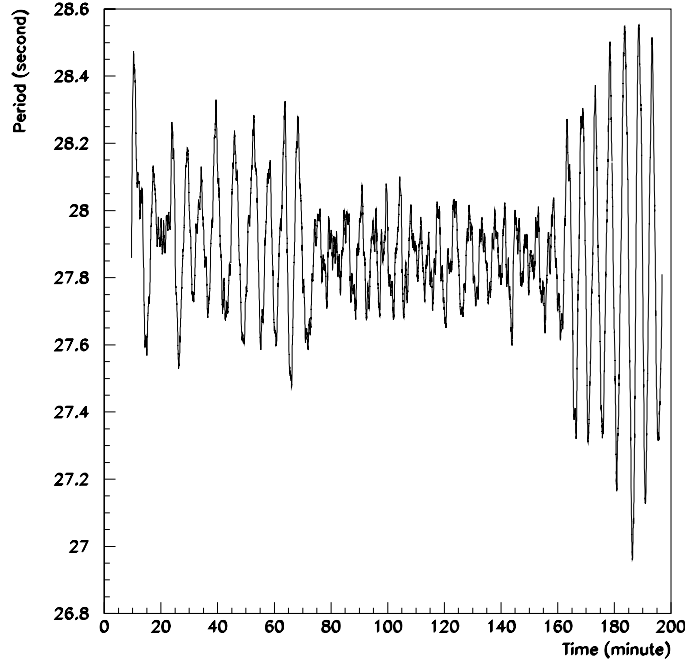


FIG. 3.4 – Évolution de la période en fonction du nombre de tours pour le vol KS3.

plusieurs signaux. Le fait d'une étoile puisse engendrer plusieurs signaux va clairement rendre plus difficile l'association entre signaux et étoiles, clef de voûte de notre stratégie, et dans une moindre mesure gêner la détermination de la période. Pour améliorer la qualité des données, les signaux correspondant à des diodes adjacentes et situés dans des intervalles de temps proches sont donc regroupés pour ne former qu'un seul signal. Le numéro de diode et le numéro échantillon du signal global sont obtenus par moyenne pondérée par le flux.

D'autres phénomènes gênent également la détermination de la période. Les étoiles ne sont pas systématiquement vues d'un tour à l'autre, du fait de la rotation de la Terre, ou encore de la pendulation de la nacelle. De plus, les données du senseur stellaire sont bruitées. Un signal ne correspond donc pas forcément à une étoile.

On donne en annexe les formules qui permettent de déduire les effets d'un changement de direction de l'axe de rotation sur les coordonnées θ et φ d'une étoile dans le repère lié à la nacelle. Si l'on suppose que la pendulation est négligeable, à chaque tour la direction de l'axe de rotation de la nacelle change d'environ $7'$ du fait de la rotation de la Terre. Soit en utilisant, les formules données en annexes :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\varphi \cos\alpha_p & -\cos\varphi \\ -\sin\delta_p + \cot\theta \cos\delta_p \cos\varphi & \cot\theta \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha_p \\ \Delta\delta_p \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_p \Delta\alpha_p \sin\varphi \\ -\sin\delta_p \Delta\alpha_p + \cot\theta \cos\delta_p \Delta\alpha_p \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

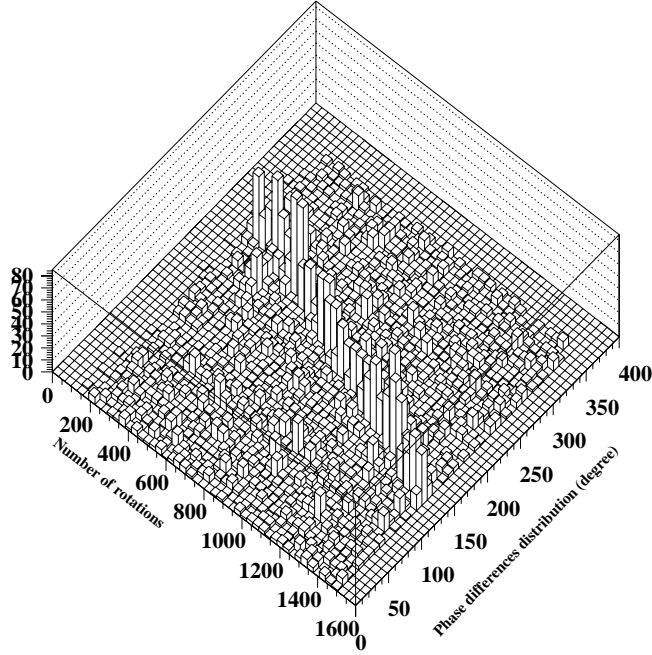


FIG. 3.5 – On cherche à chaque tour la correction de phase $\Delta\hat{\varphi}$ qui permet d'effectuer le plus d'associations signaux intenses - étoiles brillantes. La figure montre l'évolution de la distribution du nombre d'associations possibles pour différentes valeurs de $\Delta\hat{\varphi}$. Le valeur de $\Delta\hat{\varphi}$ pour laquelle le nombre d'associations est maximum permet de corriger l'estimation de la phase.

Cette relation permet d'estimer le déplacement des étoiles sur un tour dans le repère de la nacelle. Les étoiles situées au Nord ($\varphi = 0^\circ$) et au Sud ($\varphi = 180^\circ$) sont revues au tour suivant par la même diode ($\Delta\theta = 0$). Le décalage est maximal pour les étoiles situées à l'Est et à l'Ouest et vaut $\Delta\theta = 7'$ ce qui, compte tenu de la géométrie de la barrette, correspond à une variation de quatre numéro de diode (voir équation 3.5). En pratique, on utilise une coupure un peu plus lâche pour prendre en compte la pendulation.

L'algorithme de recherche de période échoue dans les zones où la pendulation est importante. Dans les plages où la recherche de période a échoué, la valeur de la période est interpolée. En itérant, l'algorithme de recherche de période avec des coupures plus strictes, on arrive à estimer la période sur l'ensemble du vol. On a représenté l'évolution de celle-ci sur la figure 3.4. On peut observer la modulation de la période due au dispositif d'asservissement de la vitesse de rotation.

3.3.2 Phase du senseur stellaire

La phase du senseur stellaire est construite par intégration à partir de la vitesse angulaire ω :

$$\varphi = \int \omega dt \quad (3.4)$$

Cependant, on ne dispose pas de la valeur de la vitesse rotation¹⁴. Toutefois, connaissant la période de rotation, on peut estimer la valeur de la vitesse moyenne $\frac{2\pi}{T}$. On construit donc une estimation $\hat{\varphi}$ de la phase à partir de la vitesse moyenne $\frac{2\pi}{T}$. Cependant, comme nous avons utilisé la vitesse moyenne au lieu de la vitesse instantanée dans l'équation 3.4 pour construire l'estimation $\hat{\varphi}$ de la phase, on s'attend à ce que l'estimation $\hat{\varphi}$ ne corresponde à la phase φ qu'à une fonction lentement variable près. Pour corriger ce biais, on compare tour après tour la direction des signaux les plus intenses à celle des étoiles les plus brillantes situées dans la bande de $1,4^\circ$ balayée par le senseur stellaire à chaque rotation. On cherche à associer les signaux aux étoiles dont les directions sont proches. On sait que la phase estimée, $\hat{\varphi}$, n'est pas correcte. Pour déterminer la bonne valeur de phase, on modifie l'estimation de la phase $\hat{\varphi}$ d'une valeur $\Delta\hat{\varphi}$, de sorte que la nouvelle estimation de la phase soit $\hat{\varphi} + \Delta\hat{\varphi}$. On effectue des associations étoiles-signaux pour différentes valeurs de $\Delta\hat{\varphi}$. On cherche en particulier la valeur qui permet d'obtenir le maximum d'associations signal intense- étoile brillante. Cette valeur est alors utilisée pour corriger l'estimation de la phase. La figure 3.5 montre la distribution du nombre d'associations étoiles-signaux effectué tour après tour en fonction de la valeur de $\Delta\hat{\varphi}$. L'analyse de cette distribution permet de corriger le biais de $\hat{\varphi}$. L'estimation de la phase atteint alors une précision de l'ordre du degré.

¹⁴ Archeops dispose d'un gyroscope mesurant de la vitesse de rotation de la nacelle autour du pivot. Cependant, cette vitesse diffère de la vitesse ω définie par la relation 3.4. En effet, la pendulation module φ et donc ω , même si la vitesse de rotation autour du pivot ne varie pas... On peut toutefois utiliser cette donnée pour construire une estimation de la phase. Il est cependant aussi possible d'estimer la phase directement à partir des données du senseur stellaire.

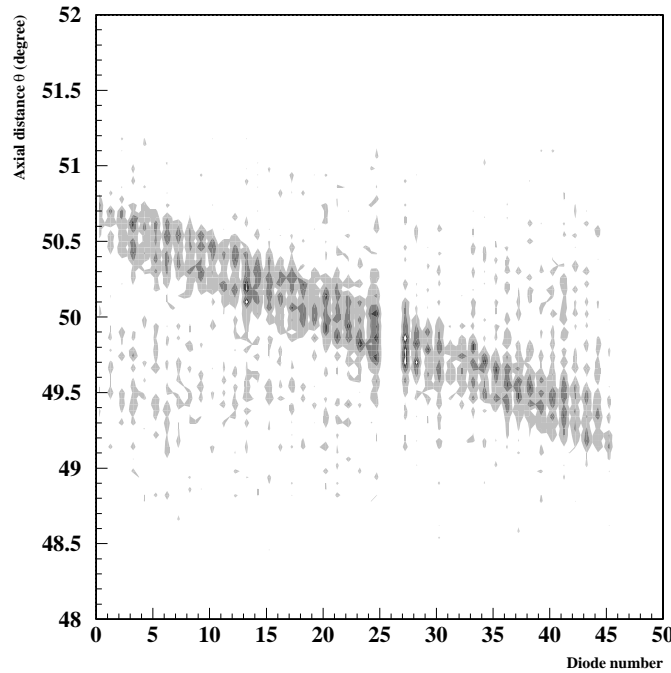


FIG. 3.6 – Cette figure montre l'évolution de la distance axiale des étoiles les plus brillantes en fonction du numéro de diode des signaux les plus intenses. La diode 26 étant très bruitée, elle a été exclue de l'analyse.

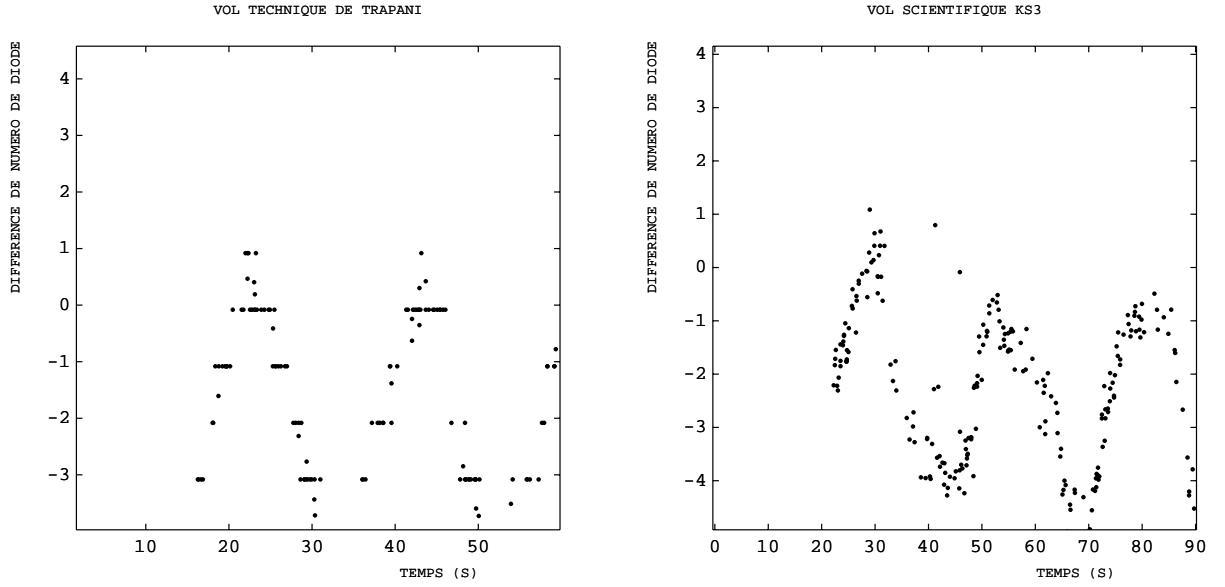


FIG. 3.7 – Une étoile détectée par le senseur stellaire d’un tour à l’autre n’est pas vue par la même diode. La variation de numéro de diode Δn correspondante varie sinusoidalement en fonction de la phase. La figure de gauche montre l’évolution de Δn au cours du vol de Trapani. La figure de droite est relative au vol scientifique de Kiruna KS3. Le vol de Kiruna a lieu à une altitude plus basse (35 km) que pour Trapani (40 km). Les vents plus forts lors du vol de Kiruna ont induit une pendulation plus importante, ce qui dégrade le caractère sinusoidal de l’évolution de Δn et rend son exploitation plus difficile.

La figure 3.6 montre la distribution de la distance axiale θ^* des étoiles en fonction du numéro de diode des signaux. Seuls les couples étoile-signal ayant une phase compatible ont été retenus afin de réduire le bruit de fond. Cette distribution permet de déterminer les caractéristiques géométriques du détecteur, c’est à dire la relation entre la distance axiale θ et le numéro de diode de la barrette du senseur stellaire. On obtient pour le vol KS3 :

$$\theta = 50,659 - 0,0313 n_{diode} \quad (\text{en degrés}) \quad (3.5)$$

La relation que l’on obtient est fiable malgré la pendulation de la nacelle. En effet, la distribution utilisée pour déterminer la relation 3.5 a été construite en utilisant les signaux (et les étoiles) sur toute la durée du vol. Les effets de pendulation sont donc moyennés et jouent sur la largeur de la distribution de la figure 3.6.

Il existe une autre possibilité pour corriger l’estimation de la phase. On peut également exploiter la relation 3.3 qui relie le déplacement d’une étoile dans le repère de la nacelle à la phase du senseur stellaire. Cette relation, équation 3.3, lie en effet la variation de numéro de diode lors de la détection d’une même étoile d’un tour à l’autre à la phase de celle-ci. En pratique cependant, plus la pendulation est importante, plus la phase est difficile à extraire. La figure 3.7 montre l’évolution de la variation du numéro de diode Δn en fonction du temps. On observe que les oscillations sont sinusoidales, comme le prévoit la relation 3.3 lorsque la pendulation est faible. Toutefois la pendulation étant plus importante pour le vol KS3, l’évolution de Δn n’est plus sinusoidale. L’ajustement de la phase devient plus complexe. La méthode précédente basée

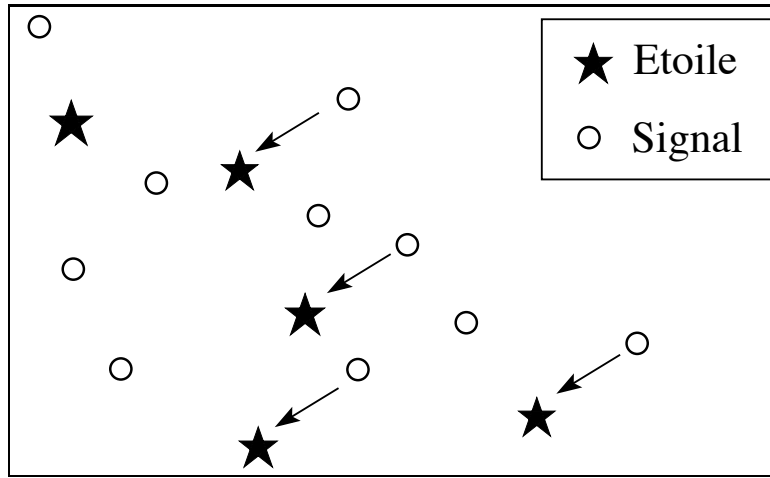


FIG. 3.8 – Principe de l'algorithme de reconstruction étoiles-signaux. Une erreur sur la direction de l'axe de rotation, ou la phase, induit localement un déplacement d'ensemble des signaux par rapport aux étoiles correspondantes. L'algorithme d'association recherche ce type de déplacement pour faire correspondre signaux et étoiles.

sur la comparaison des coordonnées des signaux intenses avec celles des étoiles brillantes s'avère en pratique plus robuste et plus simple à mettre en œuvre.

3.3.3 Algorithme d'association étoiles-signaux

L'algorithme d'association est basé sur la comparaison entre la direction \mathbf{u}^* , connue, des étoiles, et la direction reconstruite \mathbf{u}_{sig} des signaux. Une erreur δ sur la direction de l'axe de rotation, ou sur la phase, induit une rotation d'ensemble de la position des signaux sur le ciel. La direction reconstruite des signaux est alors décalée d'une valeur proche de δ .

Lorsque la pendulation est de faible amplitude, le GPS donne une bonne approximation de la direction de l'axe de rotation et la direction des signaux est assez bien reconstruite. Lors de phases où la pendulation est plus forte, l'estimation GPS conduit à une erreur de reconstruction plus importante. L'écart entre la direction estimée des signaux et la direction des étoiles n'est donc pas constant. Cependant, l'inertie de la nacelle est suffisamment importante pour que le mouvement de celle-ci soit régulier sur une fraction de tour de quelques degrés. L'erreur δ , et donc les paramètres de la rotation locale associée, sont des fonctions lentement variables. Sur un intervalle de quelques degrés, les paramètres de la rotation induite par l'erreur ne changent donc quasiment pas. Les directions reconstruites de signaux détectés sur un intervalle réduit sont donc déplacées d'une façon similaire par rapport aux directions réelles. Ce phénomène est illustré figure 3.8. L'algorithme exploite donc cette propriété et procède en deux étapes :

- ❑ Dans un premier temps, on fait correspondre à chaque signal un ensemble d'étoiles dont la position et l'intensité sont compatibles avec celles du signal.
- ❑ Dans un deuxième temps, l'algorithme compare les décalages δ_i entre les directions du signal et d'une étoile. Il cherche en particulier si pour N signaux successifs, il est possible d'associer à chacun d'eux une étoile de sorte que les N décalages δ_i soit proches. Ces déplacements sont la signature de la rotation locale induite par une mauvaise estimation de la phase ou/et de l'axe de rotation.

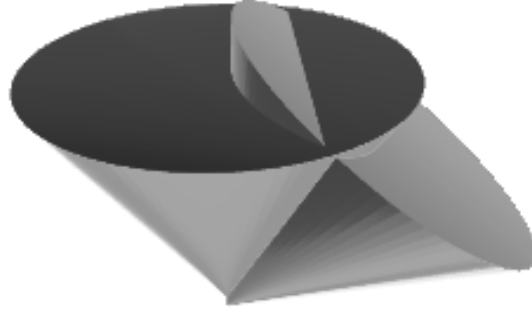


FIG. 3.9 – On considère un couple signal-étoile. La direction de l'étoile associée au signal est connue, ainsi que l'écart angulaire θ entre l'étoile et l'axe de rotation. Ce dernier se trouve donc sur le cône dirigé vers l'étoile et d'ouverture θ . Deux cônes permettent de spécifier deux directions possibles de l'axe de rotation.

Les paramètres, comme le nombre N de signaux consécutifs, la tolérance de reconstruction (distance entre le signal et les étoiles correspondantes), peuvent être optimisés pour améliorer le taux d'association. Les coupures ont été ajustées pour favoriser la qualité des associations : des coupures strictes évitent d'effectuer de mauvaises associations, mais diminuent le nombre d'associations sur les zones où l'estimation du pointage est mauvaise. Cependant, une étoile est en général vue durant plusieurs tours de suite par le senseur stellaire. Cette propriété permet d'augmenter le taux d'association signal-étoile. Lorsque l'on a pu réaliser une association à un moment donné, cette association est propagée en amont et en aval des données.

3.3.4 Améliorations de l'estimation du pointage

La distance axiale θ est la seule grandeur mesurée directement. Cette information permet de reconstruire la direction de l'axe de rotation en utilisant les associations signal-étoile. La position du signal devant être identique à celle de l'étoile associée, l'axe de rotation doit donc se situer sur un cône centré sur l'étoile et ayant une ouverture angulaire égale à la distance axiale θ . Deux couples étoile-signal permettent alors de reconstruire la direction de l'axe de rotation. Les deux cônes indiquent les directions possibles de l'axe de rotation. Les cônes se coupent en deux endroits comme l'illustre la figure 3.9. Ces deux intersections correspondent à deux solutions. Une seule est acceptable, c'est à dire proche de la valeur attendue.

La méthode utilisée repose sur l'hypothèse que la direction de l'axe de rotation est la même pour les deux couples. Cela signifie que l'on doit considérer des couples suffisamment proches pour que l'axe de rotation n'ait pas bougé significativement, mais assez éloignés pour que les cônes soient distincts. Deux couples étoile-signal produisant une estimation de la direction de l'axe de rotation, N couples génèrent $N(N-1)/2$ estimations. Le mouvement de pendulation étant

supposé lent, la direction de l'axe de rotation est caractérisée à l'aide d'une fonction lentement variable. La direction de l'axe de rotation est ainsi ajustée sur toute la durée du vol en effectuant un moindre carré.

Dans un deuxième temps, la phase du senseur stellaire est recalculée compte tenu de la nouvelle direction de l'axe de rotation. On obtient ainsi une nouvelle valeur de phase pour chaque couple signal-étoile. La phase doit ensuite être interpolée pour attribuer une nouvelle valeur aux signaux qui n'ont pas été associés.

Les nouvelles valeurs de phase et de direction du pivot permettent de reconstruire plus précisément la direction des signaux. Le processus est alors itéré avec des critères de plus en plus sélectifs, l'écart entre directions du signal et de l'étoile se réduisant.

3.3.5 Étalonnage du senseur stellaire

Les associations signaux-étoiles permettent également d'étalonner le SST. La figure 3.10 indique que les données sont essentiellement constituées de signaux de faible intensité. La dispersion du rapport entre l'intensité mesurée et l'intensité estimée est de l'ordre de 0,25. La figure 3.11 indique que cette dispersion est plus importante pour les signaux de faible intensité. En utilisant la relation 3.1, on a :

$$\frac{\Delta I}{I} \simeq \frac{\ln(10)}{2,5} \Delta m_V \quad (3.6)$$

La précision relative à la mesure de la magnitude des étoiles est donc de l'ordre de 0,3. L'intensité est utilisée par l'algorithme d'association, réduisant ainsi le risque d'effectuer de mauvaises associations.

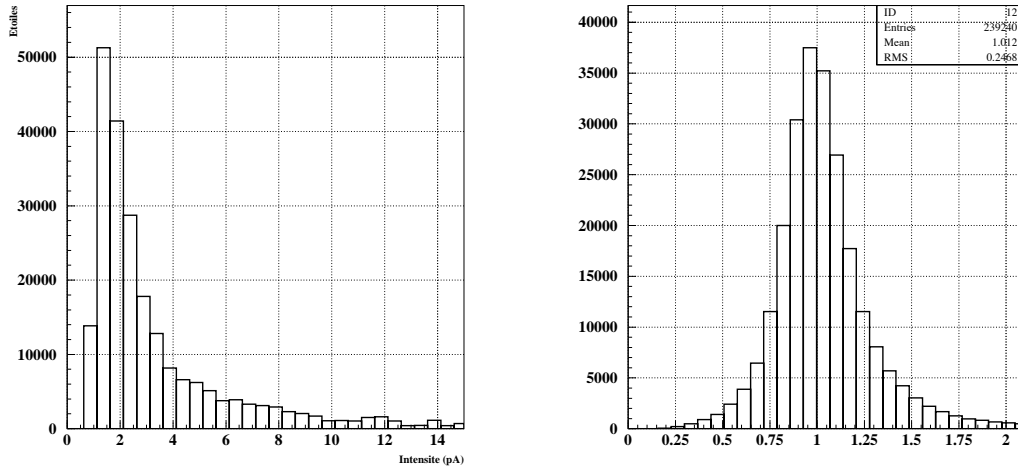


FIG. 3.10 – A gauche, distribution de l'intensité estimée des étoiles du catalogue Hipparcos/Tycho. Les étoiles de faible intensité sont les plus nombreuses. A droite, distribution du rapport entre intensités des signaux et des étoiles. La comparaison entre l'intensité estimée des étoiles du catalogue avec l'intensité des signaux associés permet de calibrer la réponse du senseur stellaire.

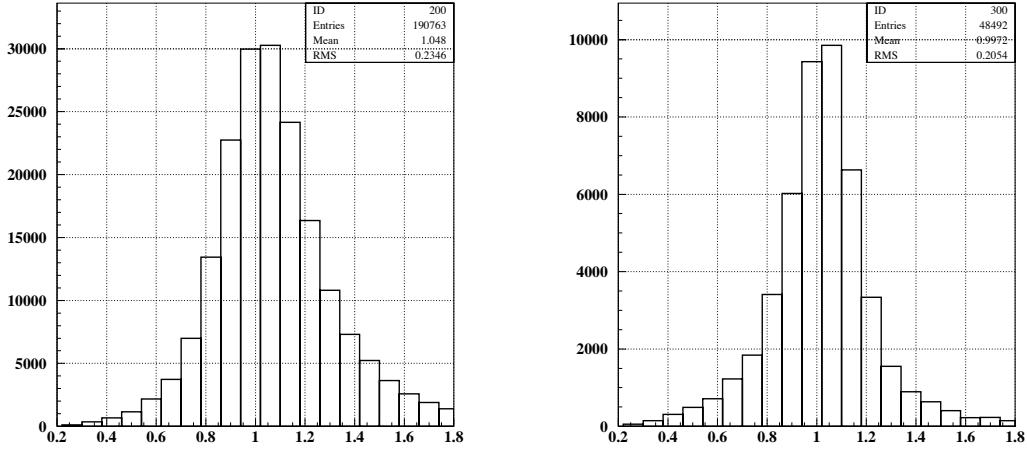


FIG. 3.11 – On compare les distributions du rapport entre intensités des signaux et des étoiles. Les signaux de faible intensité sont à gauche, ceux de forte intensité à droite. Les données sont principalement constituées d'étoiles de faible intensité. L'incertitude sur la calibration est d'autant plus large que l'intensité diminue.

3.4 Ajustement de la trajectoire

La direction de visée instrumentale est à ce stade connue aux instants pour lesquels une étoile est détectée. Il reste maintenant à interpoler la solution obtenue précédemment pour déterminer le pointage à chaque instant.

3.4.1 Interpolation de la trajectoire

Pour générer la trajectoire, on utilise une base de fonctions $U(t)$ qui permet d'obtenir une courbe lisse à partir de points dispersés et irrégulièrement espacés. Le pointage est caractérisé par un ensemble de 3 variables $(\alpha_p, \delta_p, \varphi)$. La trajectoire sera générée en développant chacune de ces variables sur la base de fonction choisie. La valeur lissée, notée $\tilde{x}(t)$, se développe sur la base de fonction $U_k(t)$:

$$\tilde{x}(t) = \sum_k c_k U_k(t) \quad (3.7)$$

On a choisi comme fonctions de base :

$$U(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{\Delta}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2\Delta^2\sigma^2}\right) \quad (3.8)$$

$$U_k(t) = U(t - t_k) \quad (3.9)$$

$$t_k = k\Delta \quad (3.10)$$

Le spectre de Fourier de $\tilde{x}(t)$ est compris entre 0 et une fréquence de coupure de l'ordre de $1/(2\Delta)$. Les coefficients c_k correspondent aux valeurs de $\tilde{x}(t)$ aux instants t_k . Il définissent donc une grille régulière de pas Δ . La courbe lissée est alors générée à partir des valeurs des coefficients

$\{c_k\}$ en utilisant le noyau U . Les coefficients sont déterminés en effectuant un moindre carré :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} (x_i - \tilde{x}_i)^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} \left(x_i - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_c} c_k U(t_i - t_k) \right)^2 \quad (3.11)$$

où $\{x_i, t_i\}$ désigne l'ensemble des données, \mathcal{N}_d est le nombre de données du senseur stellaire et \mathcal{N}_c est le nombre de coefficients à déterminer. Les coefficients c_k minimisant le χ^2 , on doit avoir $\partial_{c_k} \chi^2 = 0$. On aboutit alors au système linéaire suivant :

$$\sum_i x_i U(t_i - t_l) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_i U(t_i - t_l) U(t_i - t_k) \right) c_k \quad \text{avec } l = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

En notation matricielle, on a :

$$\chi^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{U}\mathbf{c})^T (\mathbf{x} - \mathbf{U}\mathbf{c}) \quad (3.13)$$

\mathbf{U} est la matrice dont les éléments sont $U_{ik} = U(t_i - t_k)$, et \mathbf{c} (resp \mathbf{x}) est la colonne formée avec les c_k (resp x_i). Le terme en exponentiel intervenant dans $U(t)$ assure que la matrice U_{ik} soit bande diagonale. La solution du système s'écrit alors :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{x} \quad (3.14)$$

3.4.2 Ajustement couplé

L'étape précédente donne une estimation du pointage pour chaque couple signal-étoile. Il reste à déterminer la trajectoire correspondant à une solution continue et optimale. La solution actuelle doit donc non seulement être interpolée, mais aussi optimisée compte tenu de l'ensemble des données $\{\alpha_{pi}, \delta_{pi}, \varphi_i\}_i$, où i indice les couples signal-étoile.

Une première version lissée du pointage, caractérisée par les fonctions $\tilde{\alpha}_p^0(t)$, $\tilde{\delta}_p^0(t)$ et $\tilde{\varphi}^0(t)$, est produite par simple interpolation. Il reste ensuite à déterminer les corrections $\Delta\tilde{\alpha}_p(t)$, $\Delta\tilde{\delta}_p(t)$ et $\Delta\tilde{\varphi}(t)$ qui rendront le pointage optimal. Ces corrections sont caractérisées par leur développement sur la base de fonctions U :

$$\Delta\tilde{\alpha}_p(t) = \sum_k a_k U_k(t) \quad (3.15)$$

$$\Delta\tilde{\delta}_p(t) = \sum_k d_k U_k(t) \quad (3.16)$$

$$\Delta\tilde{\varphi}_p(t) = \sum_k p_k U_k(t) \quad (3.17)$$

Regardons comment calculer les différents coefficients a_k , d_k et p_k . Le jeu de données $\{\alpha_{pi}, \delta_{pi}, \varphi_i\}_i$ s'écrit plus explicitement $\{\alpha_{pi}, \delta_{pi}, \varphi_i, \theta_i, \alpha_i^*, \delta_i^*\}_i$. θ_i est directement lié au numéro de diode. α_i^* et δ_i^* sont les coordonnées équatoriales de l'étoile associée au signal numéro i . Dans le repère de la nacelle, les données sont caractérisées par les variables $\{\alpha_{pi}, \delta_{pi}, \varphi_i, \theta_i, \varphi_i^*, \theta_i^*\}_i$. φ_i^* et θ_i^* sont les coordonnées de l'étoile dans le repère de la nacelle. On est donc naturellement amené à considérer le χ^2 suivant :

$$\chi^2 = \sum_i \left\{ \left(\frac{\varphi_i^* - \tilde{\varphi}_i}{\sigma_\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\theta_i^* - \theta_i}{\sigma_\theta} \right)^2 \right\} \quad (3.18)$$

où on a noté σ_θ et σ_φ les erreurs associées aux mesures de θ et φ . Les précisions relatives à θ et φ sont différentes pour deux raisons :

- la distance axiale θ est mesurée directement par le senseur stellaire. La phase doit être reconstruite une fois que l'on connaît la direction de l'axe de rotation.
- les diodes sont asymétriques. Elles observent une zone plus étendue suivant la direction de balayage (7,6 arcminutes) que dans la direction perpendiculaire (1,9 arcminutes).

Les coordonnées de l'étoile φ^* et θ^* dans le repère de la nacelle dépendent de la direction de l'axe de rotation. Une variation $\Delta\tilde{\alpha}_p$, $\Delta\tilde{\delta}_p$ de la direction de l'axe induit une modification des coordonnées θ^* et φ^* . Au premier ordre, on a :

$$\begin{cases} \theta^* = \theta^{*o} + c_{11}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{12}\Delta\tilde{\delta}_p \\ \varphi^* = \varphi^{*o} + c_{21}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{22}\Delta\tilde{\delta}_p \end{cases} \quad (3.19)$$

Les coefficients c_{ij} sont fonctions de α_p^o , δ_p^o , θ^{*o} et φ^{*o} . Leur expression est donnée en annexe.

Le χ^2 défini dans 3.18 se réécrit alors sous la forme :

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_i^o + c_{21}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{22}\Delta\tilde{\delta}_p - \Delta\tilde{\varphi}}{\sigma_\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\theta_i^{*o} - \theta_i + c_{11}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{12}\Delta\tilde{\delta}_p}{\sigma_\theta} \right)^2 \quad (3.20)$$

Les variables $\Delta\tilde{\alpha}_p$, $\Delta\tilde{\delta}_p$ et $\Delta\tilde{\varphi}$ n'étant pas indépendantes, les coefficients associés a_k , d_k et p_k ne peuvent pas être obtenus via la minimisation de 3.20. Pour contourner le problème, on suit la méthode utilisée pour effectuer les associations étoile-signal. On calcule d'abord la correction de la direction de l'axe de rotation $\Delta\tilde{\alpha}_p(t)$ et $\Delta\tilde{\delta}_p(t)$ à l'aide de la quantité χ_1^2 définie par :

$$\chi_1^2 = \sum_i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_i^o + c_{21}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{22}\Delta\tilde{\delta}_p}{\sigma_\varphi} \right)^2 + \left(\frac{\theta_i^{*o} - \theta_i + c_{11}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{12}\Delta\tilde{\delta}_p}{\sigma_\theta} \right)^2 \quad (3.21)$$

La correction relative à la phase est obtenue ensuite en minimisant la quantité χ_1^2 définie par :

$$\chi_2^2 = \sum_i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_i^o + c_{21}\Delta\tilde{\alpha}_p + c_{22}\Delta\tilde{\delta}_p - \Delta\tilde{\varphi}}{\sigma_\varphi} \right)^2 \quad (3.22)$$

En minimisant 3.21 par rapport à a_k et d_k , puis 3.22 par rapport à p_k , on aboutit au système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} -\sum_i \left(c_{11}^i \left(\frac{\theta_i^{*o} - \theta_i}{\sigma_\theta^2} \right) + c_{21}^i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_{oi}}{\sigma_\varphi^2} \right) \right) U_{il} \\ -\sum_i \left(c_{12}^i \left(\frac{\theta_i^{*o} - \theta_i}{\sigma_\theta^2} \right) + c_{22}^i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_{oi}}{\sigma_\varphi^2} \right) \right) U_{il} \\ \sum_i \left(\frac{\varphi_i^{*o} - \tilde{\varphi}_{oi}}{\sigma_\varphi^2} \right) U_{il} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i \left(\left(\frac{c_{11}^i}{\sigma_\theta} \right)^2 + \left(\frac{c_{21}^i}{\sigma_\varphi} \right)^2 \right) U_{il} U_{ik} & \sum_i \left(\frac{c_{11}^i c_{12}^i}{\sigma_\theta^2} + \frac{c_{21}^i c_{22}^i}{\sigma_\varphi^2} \right) U_{il} U_{ik} & 0 \\ \sum_i \left(\frac{c_{12}^i c_{11}^i}{\sigma_\theta^2} + \frac{c_{21}^i c_{22}^i}{\sigma_\varphi^2} \right) U_{il} U_{ik} & \sum_i \left(\left(\frac{c_{12}^i}{\sigma_\theta} \right)^2 + \left(\frac{c_{22}^i}{\sigma_\varphi} \right)^2 \right) U_{il} U_{ik} & 0 \\ -\sum_i \frac{c_{21}^i}{\sigma_\varphi^2} U_{il} U_{ik} & -\sum_i \frac{c_{22}^i}{\sigma_\varphi^2} U_{il} U_{ik} & \sum_i \frac{1}{\sigma_\varphi^2} U_{il} U_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ d_k \\ p_k \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

La résolution de ce système linéaire permet de déterminer les corrections sur la phase et la direction de l'axe de rotation. La matrice du système est une matrice bloc 3×3 , chaque bloc correspondant à une matrice carré $\mathcal{N}_c \times \mathcal{N}_c$ symétrique et bande diagonale (du fait des bonnes propriétés de U). La dernière ligne est découplée des deux premières, ce qui traduit le fait que les corrections en α et δ sont déterminées simultanément, la correction en phase étant calculée ultérieurement.

3.4.3 Résolution

Le taille du système 3.23, c'est à dire le nombre de paramètres à déterminer n'a pas encore été fixée. Compte tenu de l'inertie de la nacelle, les grandeurs α_p , δ_p et φ varient lentement. Le nombre \mathcal{N}_c de coefficients à déterminer, pour chacune d'elles, est lié à la résolution avec laquelle le mouvement de la nacelle est décrit :

$$N_e T_e = \Delta \mathcal{N}_c \quad (3.24)$$

où N_e est le nombre d'échantillon, T_e la période d'échantillonnage d'Archeops, et Δ le pas de la grille. En supposant que le mouvement de la nacelle a un spectre limité à 0,5 Hz, on obtient :

$$\frac{N_e}{\mathcal{N}_c} = \frac{T_e}{\Delta} \simeq 150 \quad (3.25)$$

Pour les 12 heures données du vol KS3, cela correspond à environ $4 \cdot 10^4$ coefficients.

En pratique, on détermine les corrections avec le système 3.23 pour une faible résolution. Puis, les corrections correspondant à des résolutions plus fines sont déterminées successivement. On limite de cette façon les effets dus aux trous dans les données. En effet, un trou de durée T_0 dans les données du senseur stellaire induit une limite au nombre de coefficients pouvant être utilisés. Lorsque $T_0 > n \Delta$ (avec $n \simeq 10$), les éléments correspondant de la matrice du système 3.23 ne sont plus définis. Les coefficients situés dans cette zone divergent. En résolvant 3.23 successivement avec une résolution (nombre de coefficients) croissante, on s'assure que la correction est déterminée au moins une fois. Il suffit que le rapport N_e/\mathcal{N}_c soit suffisamment grand, typiquement $N_e/\mathcal{N}_c \simeq 1500$, pour que le trou le plus important ne pose plus de problème. Les divergences sont contrôlées en imposant que la correction soit de faible amplitude. Concrètement, les coefficients divergents sont mis à zéro lors du calcul des corrections dans 3.15-3.17. La trajectoire a été ajustée successivement jusqu'à une valeur de N_e/\mathcal{N}_c de 200. On constate alors que l'utilisation d'un plus grand nombre de coefficients n'améliore pas la précision de la reconstruction ¹⁵.

3.5 Résultats

3.5.1 Analyse des résidus

On a supposé que la barrette de photodiodes était orientée perpendiculairement à la direction de balayage. Cette hypothèse peut être contrôlée en vérifiant l'absence de biais dans la différence entre la phase des étoiles et la phase du senseur stellaire en fonction du numéro de diode. La figure 3.12 montre la présence d'un tel biais. Cela signifie que la barrette de photodiodes est inclinée le long de la direction de balayage. La phase de chaque signal doit donc être corrigée pour tenir compte de cet effet.

¹⁵La façon dont la précision de la reconstruction est estimée est explicitée dans la section suivante

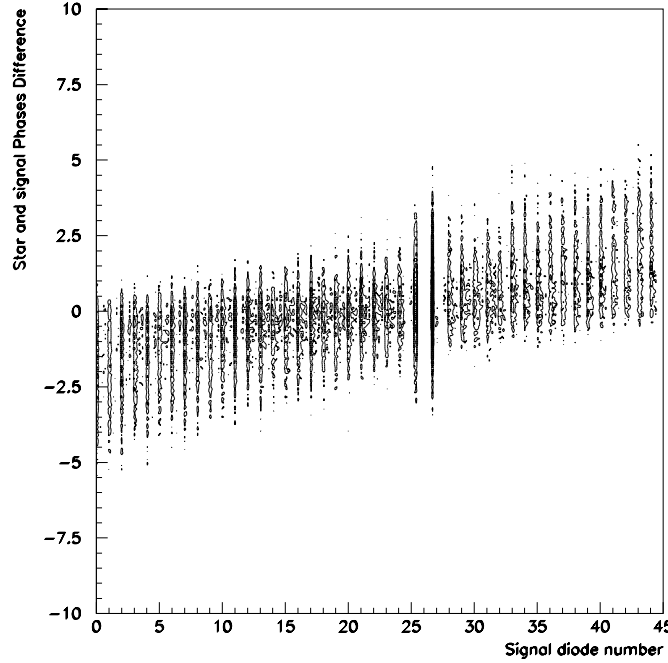


FIG. 3.12 – *Histogramme 2D montrant la présence d'un biais dans la distribution des différences de phases entre signaux et étoiles associées en fonction du numéro de diode du signal.*

On peut estimer l'inclinaison correspondante de la barrette. Le déphasage entre les extrémités de la barrette est de l'ordre de $5'$. Or, une distance de 1 mm dans le plan focal correspond à une ouverture angulaire de $1,9'$. On en déduit alors l'angle d'inclinaison α de la barrette connaissant sa longueur l_b (46 mm) :

$$\alpha l_b = \frac{5'}{1,9'} 1\text{mm} \longrightarrow \alpha \simeq 3,3^\circ \quad (3.26)$$

3.5.2 Précision de la reconstruction

Deux outils complémentaires sont disponibles pour évaluer la précision du pointage. Le premier consiste à regarder la distribution des différences entre la direction reconstruite des signaux et la direction des étoiles correspondantes. La distribution de cet écart permet de quantifier la précision globale du pointage. La matrice de covariance du système 3.23 constitue une seconde source d'information sur la précision. Cette dernière permet de construire une estimation continue de l'erreur de pointage.

L'asymétrie des contours associés aux niveaux de confiance à 68% et 95% de la figure 3.13 montre que la distance axiale est déterminée avec une meilleure précision que la phase. On trouve que les écarts types sont de $1'$ pour la distance axiale et de $2,3'$ pour la phase. L'erreur sur la distance axiale est donc environ deux fois plus petite que celle sur la phase. On retrouve d'une part le fait que les photodiodes ont une forme asymétrique ($1,9\text{time}7,6$). La zone observée par une diode est plus importante dans la direction du balayage que dans la direction perpendiculaire. D'autre part, seule la direction axiale est mesurée directement. Elle est simplement reliée au

numéro de diode. La phase doit être complètement reconstruite. On s'attend donc effectivement à ce que l'erreur associée soit plus grande.

On note, figure 3.13, que le principal effet de l'algorithme d'ajustement de trajectoire est de réduire les queues dans la distribution des erreurs. En effet, les contours correspondant aux niveaux de confiance à 68% et à 95%, dans le plan $\Delta\theta$ - $\Delta\varphi$, délimitent une zone plus réduite une fois l'ajustement effectué. La figure 3.14 montre la distribution des différences entre les coordonnées équatoriales. On déduit de cette distribution que la reconstruction est effectuée avec une erreur (1σ) de l'ordre de $2'$.

La matrice de covariance permet de produire une estimation continue de l'erreur de pointage. Cette dernière dépend du nombre de paramètres utilisés pour décrire la trajectoire. On est en pratique confronté au fait que les données ne sont pas régulièrement espacées. En particulier, les trous de plus de $\sim 10 N_e/\mathcal{N}_c$ échantillons dans les données font (localement) diverger la solution du système 3.23, et donc l'erreur associée. Lors de phases où le mouvement est régulier, l'erreur est au contraire sous-estimée dans les zones riches en signaux (étoiles).

On utilise alors un ajustement pour lequel le rapport N_e/\mathcal{N}_c est de l'ordre de 1000. L'erreur associée est alors suffisamment lisse pour être utilisée. Elle est alors ajustée, avec un facteur d'échelle, pour correspondre à la valeur issue de la distribution des écarts entre signaux et étoiles. Cette estimation continue est utilisée pour signaler les zones où le pointage est de mauvaise qualité.

La précision du pointage est à comparer avec la taille caractéristique du lobe des bolomètres. Nous indiquons dans la section 3.5.4 comment s'effectue la reconstruction du plan focal et la détermination des lobes instrumentaux. La taille du lobe est typiquement est de l'ordre de $10'$. L'erreur de pointage est donc sous-dominante par rapport à l'effet du lobe instrumental. D'un point de vue pratique, l'erreur de pointage élargit le lobe effectif mesuré au cours du vol. Ce lobe effectif correspond à la convolution du lobe instrumental et de l'erreur de pointage.

3.5.3 Pendulation

Pour étudier les caractéristiques de la pendulation, on compare la direction de l'axe de rotation avec celle correspondant à la verticale locale : $\delta_{axe} - \delta_{verticale}$. Il est clair que le terme $\delta_{verticale}$, lié au déplacement du ballon ne contient que des très basses fréquences. A titre d'exemple, une variation de $5'$ de la position du ballon sur 30 secondes (temps caractéristique lié au mouvement de la nacelle), implique une vitesse de déplacement de l'ordre de 600 km/h. Le spectre de δ_{axe} , seul, permet donc de mettre en évidence les modes de pendulation. On observe sur la figure 3.15 deux modes de pendulation. Le mode à 0,035 Hz est associé à la fréquence de rotation. Le mode à 0,044 Hz coïncide avec la fréquence de pendulation d'un pendule simple d'environ 125 mètres de long. Cette distance correspond à la longueur de la chaîne de vol.

3.5.4 Reconstruction du plan focal

La détermination du plan focal s'effectue à l'aide du signal induit par Jupiter dans les données des bolomètres. Le diamètre apparent de Jupiter est de l'ordre de $40''$. Jupiter se comporte donc comme une source ponctuelle et produit un pic dans le signal bolométrique. Cet effet est illustré figure 3.16. L'étude du signal de Jupiter permet ainsi de caractériser le lobe de chacun des détecteurs. La figure 3.17 montre que le temps de réponse des bolomètres rend le pic et donc le

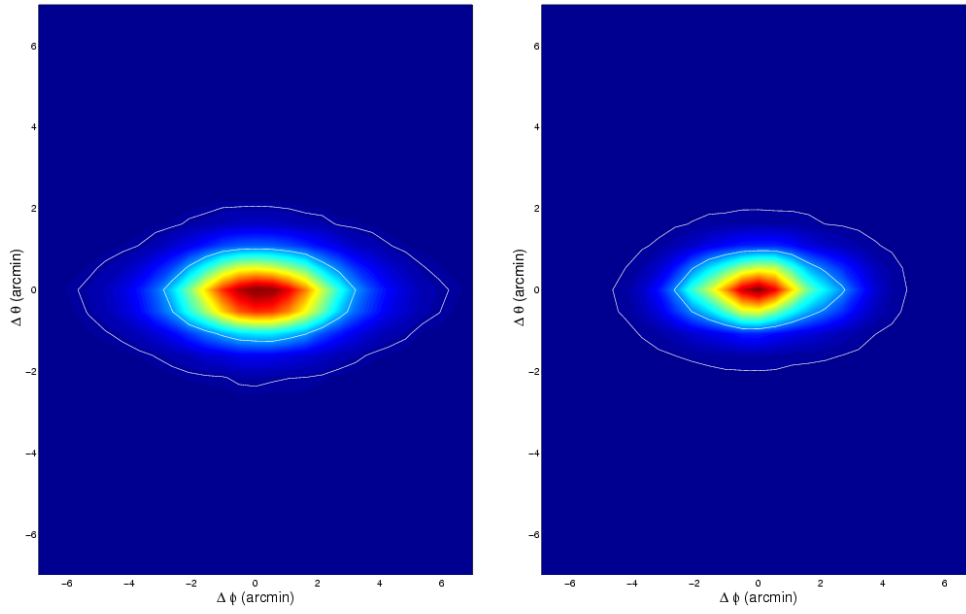


FIG. 3.13 – *Distribution des erreurs dans le plan distance axiale - phase avec les niveaux de confiance à 95% et 68%. (en blanc) avant l'ajustement de trajectoire à gauche et après à droite.*

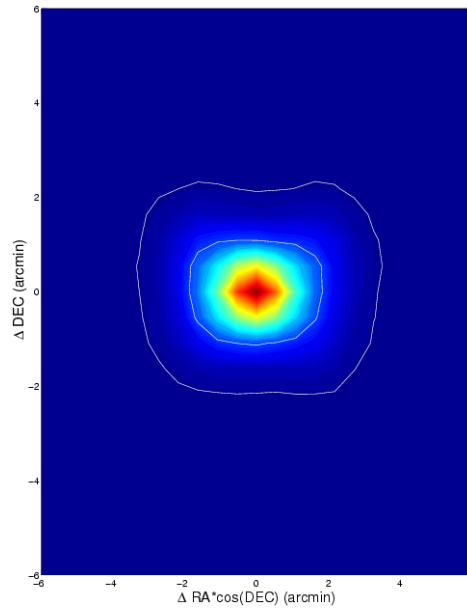
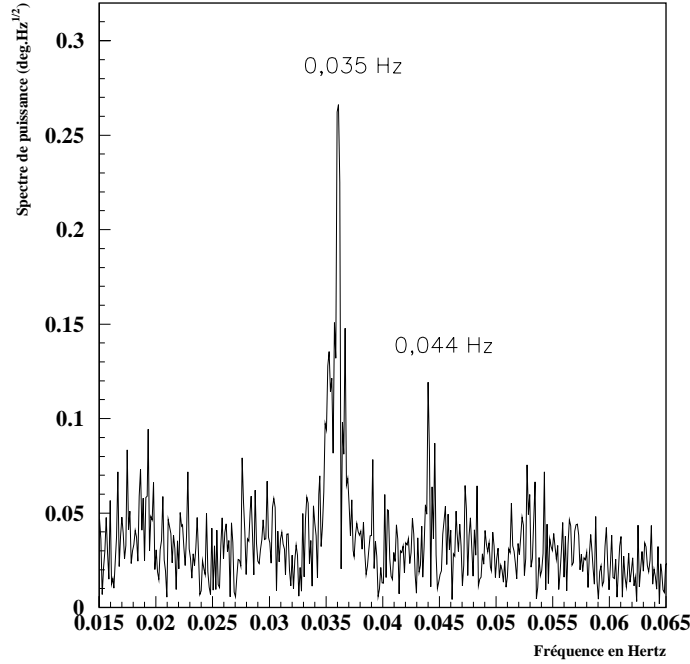


FIG. 3.14 – *Distribution des erreurs en coordonnées équatoriales pour le vol KS3. Les niveaux de confiance à 95% et 68% apparaissent en blanc.*

lobe correspondant asymétrique. L'asymétrie du lobe est difficile à prendre en compte, car elle complique la fabrication des cartes du ciel. Cet effet doit donc être corrigé.

Classiquement, la réponse impulsionnelle est modélisée par la fonction $e^{-t/\tau}$. Le signal du bolomètre correspond à la convolution entre le signal incident et la réponse impulsionnelle. La


 FIG. 3.15 – Spectre de la déclinaison δ de l'axe de rotation.

déconvolution s'effectue dans l'espace de Fourier, où elle correspond à une simple division. Pour Archeops, l'étude des glitches, pics dans les données dus aux rayons cosmiques, met en évidence la présence de deux constantes de temps [2].

La reconstruction du plan focal peut s'effectuer simplement dans le repère lié à la nacelle. La direction de l'axe de rotation étant connue, il suffit de trouver pour chaque bolomètre la phase φ_b et la distance axiale θ_b afin de spécifier la direction de visée. Or, compte tenu de la géométrie de la nacelle, l'écart angulaire ($\varphi_b - \varphi_{SST}$), entre la phase d'un bolomètre et celle du senseur stellaire est constante. La distance axiale θ_b est également constante. On peut alors utiliser le signal de Jupiter pour déterminer ces valeurs. La position de Jupiter étant connue précisément, ses coordonnées dans le repère de la nacelle, φ_J et θ_J , se calculent facilement à partir du pointage. La position et la forme du lobe d'un bolomètre s'obtiennent alors via la distribution des valeurs du signal du bolomètre dans le plan $(\theta_J - \theta_{SST})$ - $(\varphi_J - \varphi_{SST})$, où θ_{SST} et φ_{SST} sont les coordonnées de la diode centrale du senseur stellaire. La figure 3.18 illustre la reconstruction du lobe du bolomètre 217k04 du vol KS3. Le maximum de la distribution permet de trouver les coordonnées du bolomètre dans le repère de la nacelle, et donc la direction de visée du bolomètre.

3.6 Conclusion

La réalisation du pointage est une étape clé de la chaîne d'analyse des données. Elle est particulièrement délicate à effectuer dans le contexte des expériences ballon comme Archeops du fait de la dynamique complexe de la nacelle. Les algorithmes que j'ai développés ont cependant

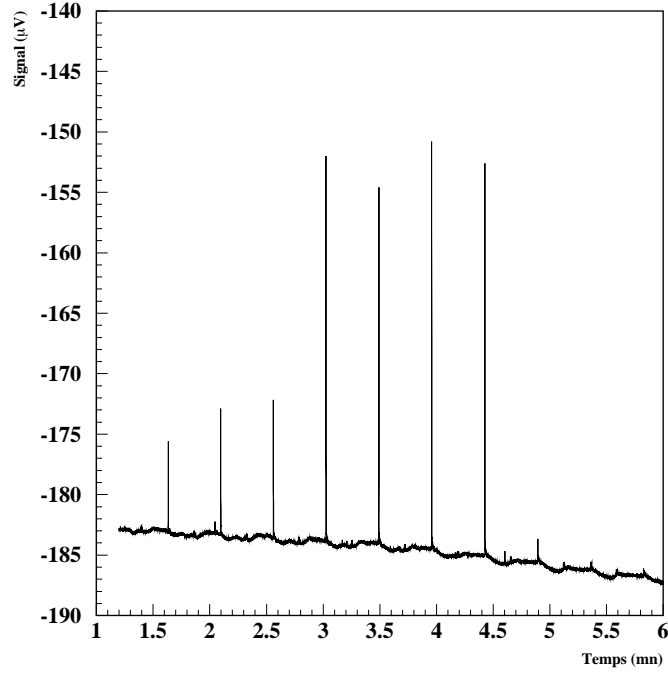


FIG. 3.16 – *Les pics observés dans les données de ce bolomètre correspondent au signal induit par Jupiter.*

permis d'obtenir le pointage avec une précision de l'ordre de $2'$ (1σ). J'ai exposé dans ce chapitre les différentes étapes relatives à la reconstruction du pointage.

L'expérience acquise au cours de ce travail a été considérable. C'est en effet dans le cadre de l'analyse des données relatives au pointage que j'ai développé les techniques algorithmiques qui m'ont été utiles pour la suite du travail effectué dans cette thèse.

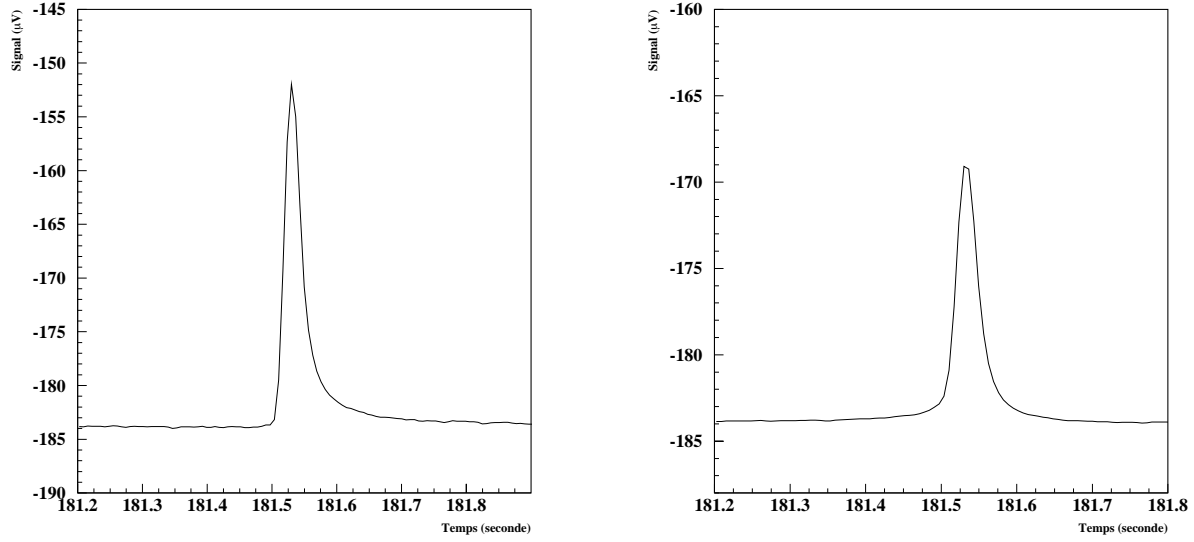


FIG. 3.17 – L'agrandissement sur un pic de la figure 3.16 permet d'observer la forme du signal induit par Jupiter (figure de gauche). La constante de temps du bolomètre crée une asymétrie du lobe dans le sens de balayage. Pour corriger cet effet (figure de droite), le signal est déconvolué de la constante de temps.

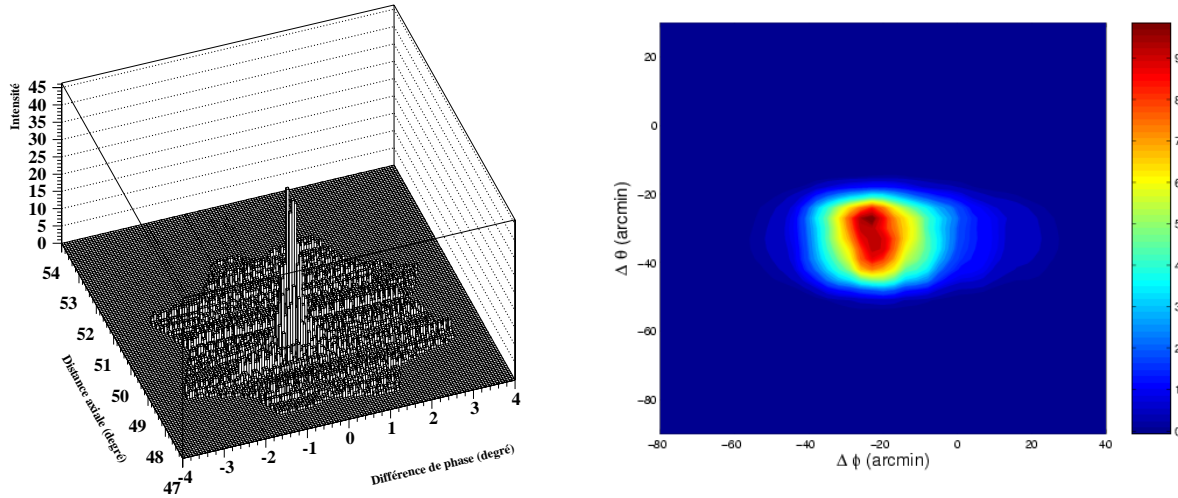


FIG. 3.18 – Reconstruction du plan focal à l'aide du signal de Jupiter. La figure de gauche représente la distribution du signal du bolomètre 217k04 (vol KS3) dans le plan $(\theta_J - \theta_{SST}) - (\varphi_J - \varphi_{SST})$ (coordonnées dans le repère de la nacelle). La figure de droite est obtenue en convoluant la distribution du signal du bolomètre par un noyau gaussien.

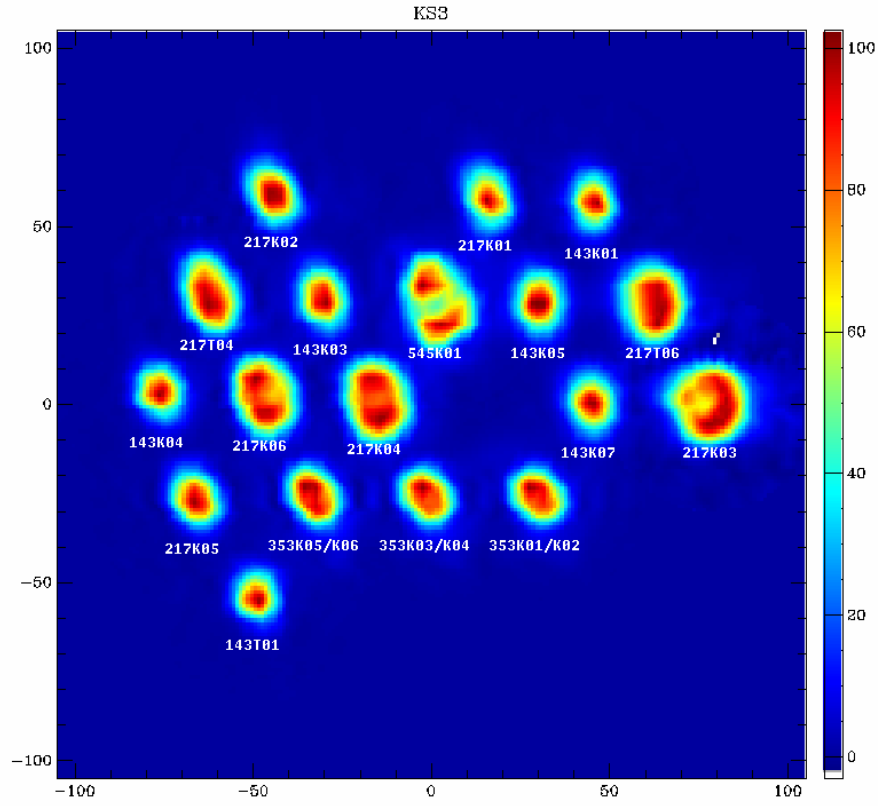


FIG. 3.19 – *Reconstruction complète du plan focal à l'aide du signal de Jupiter. Figure fournie par la collaboration Archeops.*

Bibliographie

- [1] F. Nati, P. de Bernardis, A. Iacoangelli, S. Masi, A. Benoît & D. Yvon, 2003, Review of Scientific Instruments, 74 (9), 4169 - 4175
- [2] P. Filliatre, Thèse de doctorat, 2002, Université de Grenoble

Chapitre 4

Destriage

Sommaire

4.1	Introduction	93
4.1.1	Caractéristiques des données	93
4.1.2	Fabrication de cartes	96
4.2	Destriage	98
4.2.1	Estimation de la ligne de base en masquant la Galaxie	99
4.2.2	Minimisation de la variance par pixel	103
4.2.3	Minimisation de la variance perpendiculaire à la direction de balayage	108
4.2.4	Destriage pour Archeops	114
4.2.5	Application aux données d'Archeops	121
4.3	Destriage par ondelettes	122
4.3.1	Propriétés des ondelettes	123
4.3.2	Ondelettes et bruit $1/f$	124
4.3.3	Destriage avec ondelettes par maximum de vraisemblance	125
4.3.4	Mise en œuvre	126
4.3.5	Efficacité du destriage en ondelettes	128
4.3.6	Développements	130
4.3.7	Application aux données d'Archeops	132
4.3.8	Ondelettes et destriages par minimisation de variances	134
4.4	Conclusion	135

4.1 Introduction

Dans cette partie, je présenterai les caractéristiques principales des données d'Archeops. Puis après avoir introduit brièvement les problèmes liés à la fabrication des cartes, je décrirai les algorithmes de destriage développés dans le cadre d'Archeops.

4.1.1 Caractéristiques des données

Les données temporelles d'un bolomètre, ou TOI (Time Ordered Informations), ne sont pas directement exploitables. La figure 4.1 montre un exemple de TOI. On observe la présence de *glitches*, c'est à dire de pics étroits induits par l'interaction avec un rayon cosmique. On note

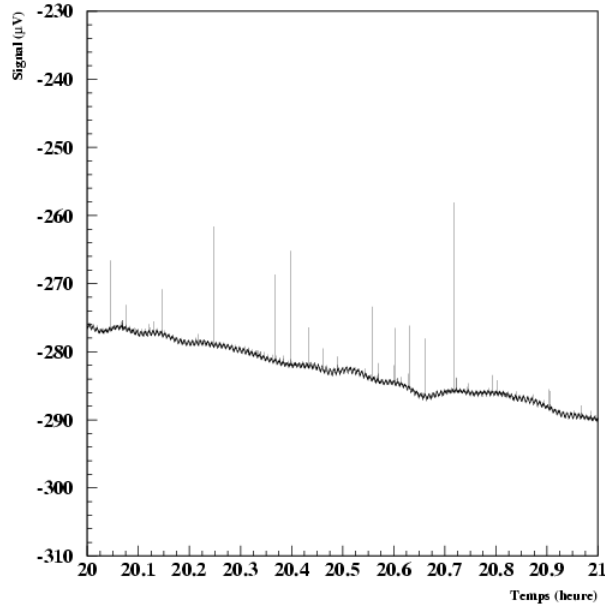


FIG. 4.1 – Exemple de TOI d’Archeops (voie à 217 GHz). Les pics présents sont appelés glitches et correspondent à un dépôt d’énergie laissé par le passage d’un rayon cosmique dans le bolomètre.

également la présence d’une dérive à très basse fréquence. Cette dérive est liée au refroidissement du cryostat. D’autres effets, comme des discontinuités, peuvent aussi être présents dans les données. Les zones ainsi contaminées sont inutilisables. Les TOI sont traitées pour corriger ces effets par un ensemble de routines développées par l’équipe proche de l’instrument. Les dérives à très basse fréquence sont par exemple retirées à l’aide d’un ajustement polynômial. Les dérives liées au refroidissement du cryostat sont corrigées en décorrélant les données des bolomètres des thermomètres.

Les portions de données affectées par les rayons cosmiques ne sont pas utilisables et sont remplacées par une réalisation contrainte du bruit. Typiquement, ce traitement concerne moins de 1,5% des données. Les zones ainsi modifiées sont étiquetées et ne sont pas prises en compte pour l’analyse.

Les TOI relatives aux données après traitement sont représentées sur la figure 4.2. Le signal astrophysique est dominé principalement par deux sources : le dipôle du CMB et l’émission galactique. Pour faciliter l’analyse, la contribution du dipôle est retirée des données lors du traitement standard. Le signal galactique apparaît nettement dans les données. En dehors du plan galactique, les données sont dominées par le bruit. On peut noter la présence de fluctuations à grande échelle figure 4.2. Ces fluctuations indiquent qu’il existe une composante de bruit à basse fréquence importante.

Le spectre typique d’un bolomètre est représenté sur la figure 4.3. Comme le bruit domine le signal du CMB, la forme du spectre est due essentiellement à la Galaxie et au bruit. La stratégie de balayage en cercle fait que la Galaxie est vue à chaque rotation. C’est l’origine des pics situés aux fréquences multiples de la fréquence rotation f_{spin} . Deux zones se distinguent dans le spectre. Au-delà de 1 Hz environ, le spectre est plat, ce qui indique que le bruit est blanc. A plus basse

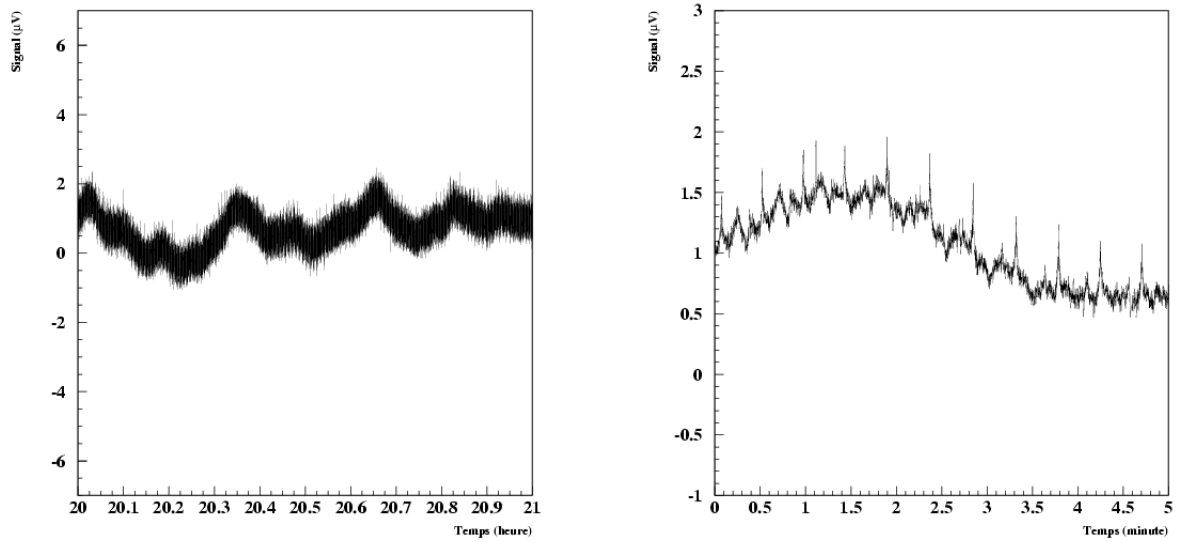


FIG. 4.2 – La figure de gauche montre un exemple de TOI issues du traitement de données. Les glitches ont été enlevés, ainsi que la composante très basse fréquence et le dipôle. Il reste cependant encore des composantes basses fréquences. La figure de droite montre un agrandissement d'une portion de TOI. On peut observer les pics correspondant au signal galactique.

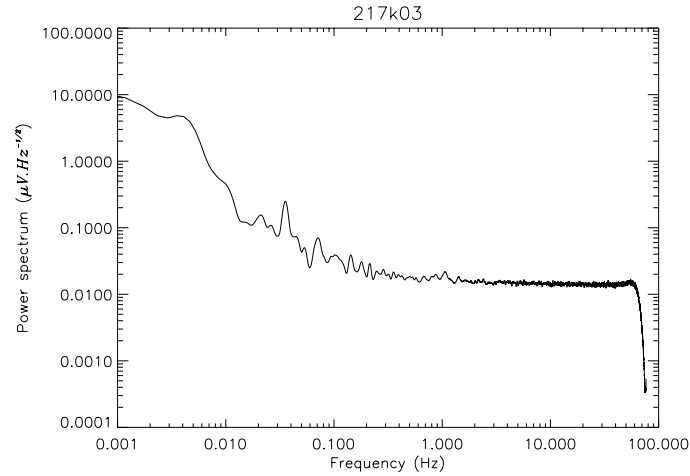


FIG. 4.3 – La figure montre le spectre de puissance lissé du bolomètre 217k03 (vol KS3). Ce spectre illustre le comportement typique d'un bolomètre. Les données sont dominées par le bruit, excepté dans la région galactique. La galaxie, vue tour après tour, induit un pic à 33 mHz c'est à dire à la fréquence de rotation f_{spin} . La remontée de puissance à basse fréquence est due à la présence de dérives. Le bruit caractérisé par ce type de spectre est appelé de façon générique bruit $1/f$. Au-delà de 0,5 Hz, on observe un spectre plat, typique d'un bruit blanc.

fréquence, le spectre remonte de façon importante. Ce type de bruit est appelé bruit 1/f. Le spectre de puissance du bruit est modélisé par une loi du type :

$$P(f) = \sigma^2 \left(1 + \left(\frac{f_k}{f} \right)^\gamma \right) \quad (4.1)$$

σ correspond au niveau de bruit blanc, γ est l'indice spectral de la composante basse fréquence. Pour Archeops, γ est typiquement compris entre 1 et 2. Le paramètre f_k est appelée la fréquence "genou". Il correspond à la fréquence de transition entre les deux régimes. Pour les données d'Archeops, la fréquence genou est typiquement comprise entre 0,1 Hz et 1 Hz. Cela signifie en particulier que le bruit associé aux dérives peut monter jusqu'à 1 Hz.

En plus du CMB et de la Galaxie, l'émission atmosphérique contribue de façon importante aux données d'Archeops. L'intensité du signal atmosphérique varie en fonction de l'altitude du ballon et de l'épaisseur d'atmosphère dans la ligne de visée instrumentale. Cette épaisseur dépend de l'élévation et de la présence d'inhomogénéités telles que les nuages d'ozone. La voie à 545 GHz est en fait dédiée au suivi des composantes galactique et atmosphérique. Le signal du CMB est très faible à cette fréquence. La décorrélation des autres voies de celle à 545 GHz permet de soustraire les composantes galactiques et atmosphériques. Les données ainsi obtenues sont utilisées dans l'analyse du CMB. Cependant, dans le cadre la physique galactique, la méthode n'est pas applicable. La fabrication de carte du ciel pose alors problème. C'est dans ce contexte expérimental que j'ai développé au sein de la collaboration des algorithmes permettant de produire des cartes du ciel.

4.1.2 Fabrication de cartes

La fabrication de cartes consiste à retrouver à partir des données temporelles, les TOI, le signal du ciel. En pratique, une carte est une représentation pixellisée, c'est à dire discrétisée, du ciel. La pixellisation Healpix [6] est la plus utilisée par la communauté.

Les données b_t d'un bolomètre peuvent s'écrire comme la somme du signal provenant du ciel s_t et du bruit n_t :

$$b_t = s_t + n_t \quad (4.2)$$

Le signal s_t dépend de la brillance du ciel et la stratégie de balayage. On exprime cette dépendance sous la forme :

$$s_t = P_{tp} m_p \quad (4.3)$$

La matrice de pointage P , de dimension $\mathcal{N}_d \times \mathcal{N}_p$, rend compte de la stratégie de balayage, \mathcal{N}_p étant le nombre de pixels de la carte \mathbf{m} et \mathcal{N}_d le nombre d'échantillons de données. Elle indique à chaque instant le pixel vers lequel pointe le lobe instrumental. La carte m_p correspond alors à la convolution du ciel et du lobe. Notons que la relation 4.3 suppose que le lobe soit symétrique, de sorte que la valeur du signal convolué ne dépende pas de l'orientation de ce dernier.

La carte du ciel s'obtient classiquement par maximum de vraisemblance. En faisant l'hypothèse que le bruit est de type gaussien, ce dernier suit la loi de probabilité suivante :

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\mathcal{N}_d} |\mathbf{N}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{n}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n} \right) \quad (4.4)$$

où \mathbf{N} est la matrice de corrélation du bruit :

$$N_{ij} = \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^T \rangle_{ij} \quad (4.5)$$

En utilisant 4.2 et 4.3, on obtient la probabilité de réalisation des données \mathbf{b} pour un ciel fixé \mathbf{m} :

$$P(\mathbf{b}|\mathbf{m}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\mathcal{N}_d} |\mathbf{N}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{m})^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{m}) \right) \quad (4.6)$$

Lorsque la probabilité $P(\mathbf{b}|\mathbf{m})$ est considérée pour \mathbf{b} fixé comme une fonction de \mathbf{m} , cette dernière est appelée fonction de vraisemblance \mathcal{L} . La carte du ciel $\hat{\mathbf{m}}$ qui maximise la fonction de vraisemblance correspond à :

$$\hat{\mathbf{m}} = [\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{b} \quad (4.7)$$

La résolution de l'équation 4.7 implique l'inversion de matrices de taille importante. Par exemple, l'inversion de la matrice \mathbf{N}^{-1} nécessite $\mathcal{O}(\mathcal{N}_d^3)$ opérations et celle de la matrice $\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}$ $\mathcal{O}(\mathcal{N}_p^3)$ demande opérations. Pour une expérience comme Archeops, impliquant des TOI de l'ordre 10^7 échantillons et des cartes de l'ordre de 10^6 pixels, de telles inversions sont irréalisables pratiquement.

Pour contourner la difficulté liée à l'inversion de la matrice $\mathbf{P}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P}$, on peut résoudre le système linéaire correspondant à l'équation 4.7 à l'aide d'algorithmes itératifs. L'inversion de la matrice de covariance du bruit peut en fait s'effectuer si le bruit possède certaines propriétés. En effet dans le cas où le bruit est stationnaire, \mathbf{N} est une matrice de Toeplitz :

$$N_{ij} = f(|i - j|) \quad (4.8)$$

De plus, si la longueur de corrélation du bruit λ_c n'est pas trop grande ($\lambda_c \ll \mathcal{N}_d$), \mathbf{N} est bande diagonale et quasiment circulante¹⁶ :

$$N_{i+1,j+1} = N_{ij} \quad \text{avec conditions limites cycliques} \quad (4.9)$$

Dans l'espace de Fourier, les matrices circulantes sont diagonales. Elles s'inversent alors facilement. De plus, le produit entre une matrice circulante et un vecteur se ramène à un produit entre deux vecteurs.

La résolution itérative du système associé à 4.7 implique à chaque itération le produit de la matrice \mathbf{N}^{-1} avec un vecteur. Ce produit nécessite en principe $\mathcal{O}(\mathcal{N}_d^2)$ opérations, et rend chaque itération coûteuse en temps de calcul. Or, compte tenu des propriétés du bruit, on effectue le produit matrice-vecteur dans l'espace de Fourier où il correspond au produit entre deux vecteurs. Le temps de calcul est alors dominé par le calcul de la transformée de Fourier qui varie en $\mathcal{O}(\mathcal{N}_d \ln \mathcal{N}_d)$. Le nombre d'opérations pour effectuer le produit matrice-vecteur avec \mathbf{N}^{-1} passe alors de $\mathcal{O}(\mathcal{N}_d^2)$ à $\mathcal{O}(\mathcal{N}_d \ln \mathcal{N}_d)$. Cette propriété permet donc d'utiliser des méthodes itératives pourvu que le nombre d'itérations ne soit pas trop important. Ces méthodes ont été utilisées dans l'analyse des données d'Archeops.

Dans le cas où le bruit est blanc et stationnaire, la matrice d'auto-corrélation du bruit est proportionnelle à la matrice unité. L'équation 4.7 s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{m}} = [\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{b} \quad (4.10)$$

La matrice $\mathbf{P}^T \mathbf{P}$ est diagonale et indique le nombre d'observations pour chaque pixel. L'opérateur $[\mathbf{P}^T \mathbf{P}]^{-1} \mathbf{P}^T$ construit donc une carte dont la valeur de chaque pixel est calculée en moyennant

¹⁶N ne possède pas les conditions aux limites pour être circulante. Cependant, dans le cas où il n'y a pas de corrélation à grande distance ce point ne concerne que peu d'éléments de \mathbf{N} ...

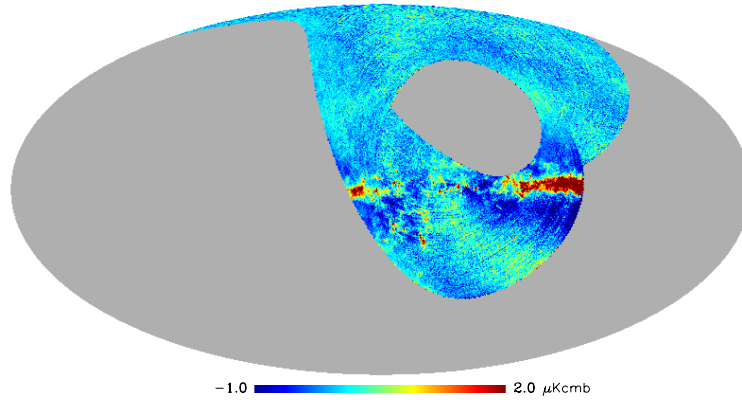


FIG. 4.4 – Cette carte correspond au bolomètre 217k04 (vol KS3) d’Archeops. Elle a été obtenue par coaddition après filtrage des fréquences inférieures à 0,1 Hz dans l’espace de Fourier. Cette coupure induit des rebonds dans les TOI de part et d’autre du signal galactique.

les observations correspondant à ce pixel. Ce procédé est appelé coaddition.

La présence de bruit de type $1/f$ dans les données correspond à la présence de corrélation à grande échelle. Le bruit $1/f$ complique le processus de fabrication de carte. Il se manifeste par la présence de dérives à basse fréquence dans les données temporelles. Ces dérives induisent des stries dans les cartes du ciel.

Le moyen le plus simple d’enlever les dérives est d’appliquer un filtre passe-haut sur les données. Cependant, l’application d’un tel filtrage induit des rebonds de part et d’autre du signal galactique. On peut observer cet effet sur la figure 4.4. L’exploitation des cartes correspondantes, dans le cadre de la physique galactique, devient alors difficile. De plus, les rebonds gênent la détermination du spectre de puissance angulaire à grande échelle du CMB. Il est donc apparu nécessaire de développer dans le cadre d’Archeops des algorithmes de destriage, c’est à dire des algorithmes capables de réduire le bruit en $1/f$ sans altérer les données.

4.2 Destriage

Le principe du destriage consiste donc à soustraire les dérives basses fréquences des données. Pour cela, on cherche à déterminer un modèle de dérive d_t de sorte que la carte obtenue avec $b'_t = b_t - d_t$ n’ait plus de stries. En pratique, la dérive d_t est caractérisée par son développement sur une base de fonctions U :

$$d(t) = \sum_k c_k U_k(t) \quad (4.11)$$

Nous avons ensuite besoin d’une quantité \mathcal{M} qui mesure le degré de stries. Les coefficients c_k sont alors déterminés en minimisant \mathcal{M} . Le problème consiste alors à trouver une méthode permettant de mesurer du niveau de stries.

Dans un premier temps, nous présenterons les méthodes de destriage que nous avons développées dans le cadre d’Archeops. Nous illustrerons qualitativement leurs propriétés respectives en

les appliquant aux données d'Archeops. Dans un deuxième temps, nous quantifierons l'efficacité de ces algorithmes à l'aide de simulations.

4.2.1 Estimation de la ligne de base en masquant la Galaxie

Principe

Pour obtenir une estimation des dérives, on peut simplement identifier celles-ci avec la partie basse fréquence des données. Cependant, on a vu que ce procédé introduit des rebonds à cause de la présence du signal galactique. Pour éviter cet effet, on effectue l'estimation en ne prenant pas en compte le signal galactique. On utilise comme mesure \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \sum_{i \in \text{masque}} (b_i - d_i)^2 \quad (4.12)$$

On utilise un masque pour sélectionner les points de la TOI à garder. Le masque est défini à partir d'un modèle de Galaxie. On utilise pour cela une carte SFD [13][5]. Seuls les points ayant une intensité inférieure à un certain seuil interviennent dans la somme 4.12.

En utilisant les fonctions de base définies dans 3.4.1, on obtient :

$$\mathcal{M} = \sum_{i \in \text{masque}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_c} c_k U(t_i - t_k) \right)^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} \delta_{gal}(i) \left(b_i - \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_c} c_k U(t_i - t_k) \right)^2 \quad (4.13)$$

où \mathcal{N}_c correspond au nombre de coefficients à déterminer et \mathcal{N}_d au nombre de points de données. La fonction $\delta_{gal}(i)$ vaut 0 si à l'instant i le bolomètre pointe vers le plan galactique, et 1 sinon. Elle est obtenue directement à partir du masque galactique. Les coefficients c_k minimisant \mathcal{M} , on doit avoir $\partial_{c_k} \mathcal{M} = 0$. On aboutit alors au système linéaire suivant :

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} \delta_{gal}(i) b_i U(t_i - t_l) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_c} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_d} \delta_{gal}(i) U(t_i - t_l) U(t_i - t_k) \right) c_k \quad \text{avec } l = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_c \quad (4.14)$$

Si on note U la matrice dont les éléments sont $U_{ik} = U(t_i - t_k)$, et Δ_g la matrice $\mathcal{N}_d \times \mathcal{N}_d$ diagonale telle que $\Delta_g(i, i) = \delta_{gal}(i)$, le système 4.14 s'écrit :

$$(U^T \Delta_g U) c = U^T \Delta_g s \quad (4.15)$$

c et b sont les colonnes formées avec c_k et b_i .

La résolution de ce système permet alors d'estimer la ligne de base en faisant abstraction de la contribution galactique. La figure 4.5 montre la ligne de base obtenue par cette méthode. On observe qu'elle ne semble pas perturbée par le signal galactique. On constate que la carte obtenue par simple coaddition, figure 4.6, présente peu de stries. D'autre part, les rebonds autour du signal galactique sont beaucoup moins marqués par rapport à la carte obtenue après filtrage direct, figure 4.4.

Mise en œuvre

Le nombre de coefficients à déterminer est lié à la plage fréquentielle $[0 - f_c]$ dans laquelle l'algorithme opère. On peut interpréter $\Delta_p = \mathcal{N}_d / \mathcal{N}_c$ comme le pas d'une grille régulière sur laquelle sont définis les \mathcal{N}_c coefficients du développement sur la base U . La relation entre la

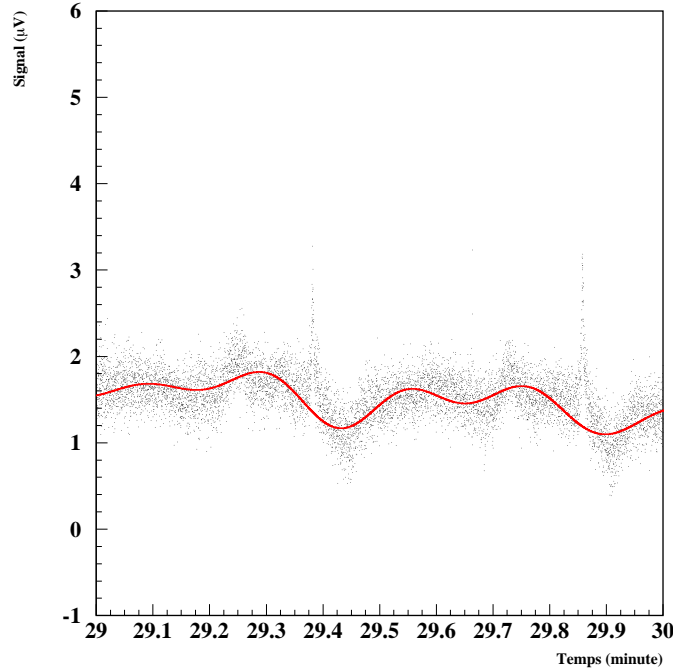


FIG. 4.5 – Détermination de ligne de base par interpolation du signal galactique.

fréquence de coupure f_c et le nombre de coefficients utilisés pour le développement s'établit en utilisant le critère de Nyquist :

$$f_c \simeq 0,5 \frac{f_e}{\Delta_p} \quad (4.16)$$

où l'on a réutilisé les notations introduites dans 3.4.1. Le choix de la valeur de f_c , et donc du nombre de coefficients à déterminer, est défini par la stratégie de balayage. En effet, la taille maximale T_{ex} de la zone de données à interpoler impose la valeur de la fréquence de coupure f_c via, encore une fois, le critère de Nyquist :

$$f_c \leq \frac{1}{2T_{ex}} \quad (4.17)$$

Lorsque le balayage s'effectue perpendiculairement à la Galaxie, figure 4.7, la portion de TOI à interpoler est réduite. Cependant, quand le balayage s'effectue le long de la Galaxie, une fraction de tour plus importante est exclue des données. Dans le cas de balayages tangents à la Galaxie, on est amené à exclure des zones représentant jusqu'à un quart de cercle. On a alors dans ce cas en utilisant 4.17 :

$$T_{ex} = \frac{1}{4f_{spin}} \rightarrow f_c \leq 2f_{spin} \simeq 0,07\text{Hz} \quad (4.18)$$

avec une fréquence de rotation de l'ordre de 33 mHz. La fréquence d'échantillonnage de l'électronique de lecture d'Archeops étant de 153 Hz, on trouve en utilisant 4.16 :

$$\frac{\mathcal{N}_d}{\mathcal{N}_c} \sim 10^3 \quad (4.19)$$

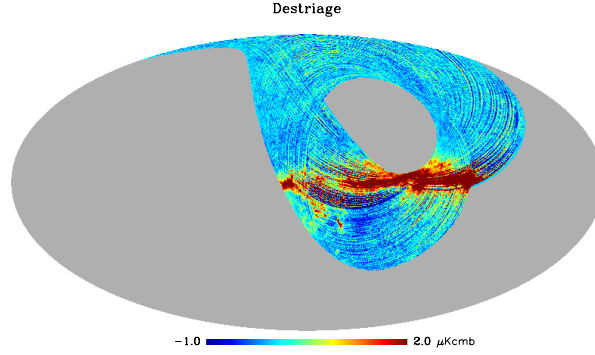


FIG. 4.6 – Carte correspondant au bolomètre 217k04, obtenue par coaddition après estimation des dérives avec la méthode d'interpolation du signal galactique. Les dérives ont été estimées jusqu'à environ 0,1 Hz. En comparant cette carte avec la figure 4.4, on observe que les rebonds de part et d'autre du signal galactique sont beaucoup moins marqués.

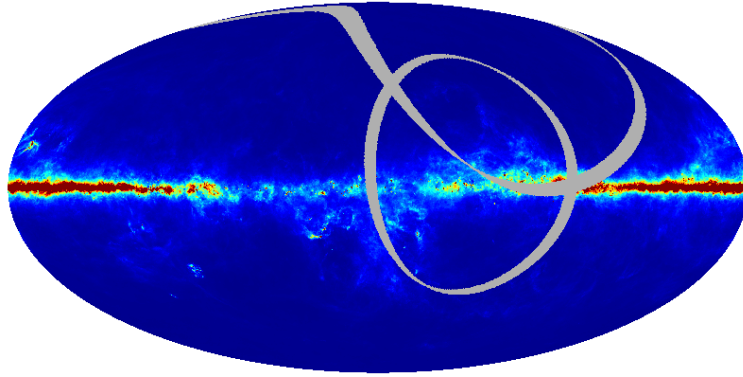


FIG. 4.7 – Positions du balayage par rapport au plan galactique. Au début du vol, les cercles sont centrés sur le plan galactique. Une faible portion du balayage s'effectue dans la zone d'émission galactique. Dans ce cas, la portion de TOI à interpoler est peu étendue. En fin de vol, le balayage s'effectue tangentielllement au plan galactique. Une partie importante du balayage s'effectue dans la zone galactique. La portion de TOI à interpoler est alors plus grande, et la ligne de base est moins bien estimée.

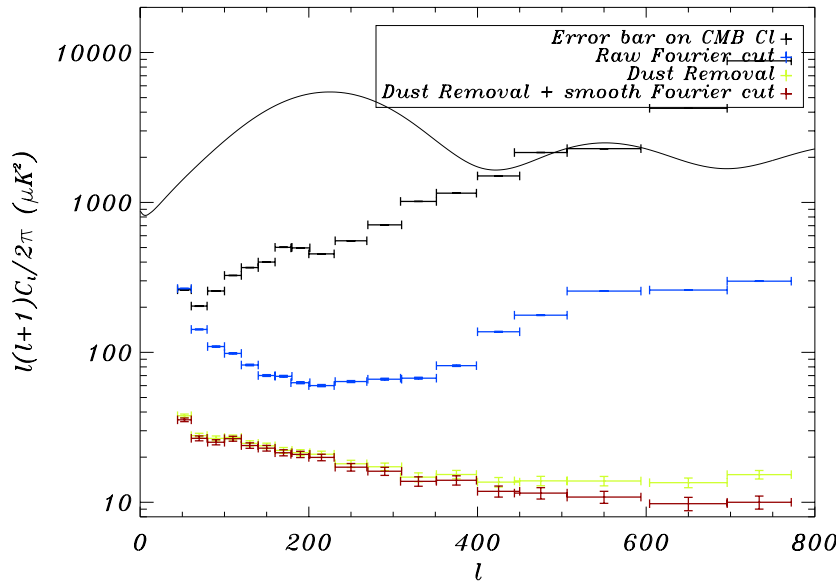


FIG. 4.8 – La figure est extraite de [2]. Elle montre les effets sur le spectre de puissance des méthodes permettant de retirer des données le signal galactique. Les données en bleu montrent l'excès de puissance angulaire associé aux rebonds produits par filtrage direct. Les données en vert correspondent à l'excès de puissance associée à la méthode d'interpolation galactique. L'utilisation d'un filtre de Fourier supplémentaire, en rouge, atténue encore un peu la puissance résiduelle.

Les données utilisées pour l'analyse correspondent à un ensemble de $6 \cdot 10^6$ échantillons. Le nombre \mathcal{N}_c de coefficients à déterminer est donc de $6 \cdot 10^3$.

Évaluons le temps nécessaire pour résoudre le système linéaire 4.14. La résolution elle-même implique l'inversion d'une matrice $\mathcal{N}_c \times \mathcal{N}_c$. Le nombre d'opérations nécessaires est donc de l'ordre de \mathcal{N}_c^3 . Le remplissage du système fait appel à une sommation sur les données pour calculer les éléments de la matrice du système. De prime abord, cette sommation implique $\mathcal{N}_c^2 \times \mathcal{N}_d \simeq 10^{14}$ opérations ! Les fonctions de bases U choisies permettent en fait de réduire ce nombre. En effet, on a :

$$U(t_i - t_k) = 0 \text{ si } |t_i - t_k| > \frac{\mathcal{N}_b}{f_c} \quad (4.20)$$

avec $\mathcal{N}_b \simeq 20$. Cette propriété fait que la matrice $U^T \Delta_g U$ est bande diagonale de largeur $4\mathcal{N}_b$. Chaque élément i de la TOI intervient donc en fait pour le calcul de $2\mathcal{N}_b$ valeurs U_{ik} , et donc de $4\mathcal{N}_b^2$ éléments de matrice. En tenant compte du fait que la matrice est symétrique, le nombre total d'opérations nécessaires pour construire le système est donc de $2\mathcal{N}_b^2 \mathcal{N}_d \sim 10^{10}$.

Le fait que la matrice du système soit bande diagonale permet de segmenter les données en tronçons de taille plus réduite. Ainsi, au lieu de résoudre un système de taille importante, on peut considérer plusieurs sous-systèmes, plus rapides à résoudre. Nous avons utilisé cette possibilité lors de l'implémentation du code.

Application

Cet algorithme a été utilisé dans l'analyse des données d'Archeops [6]. La figure 4.8 montre

l'excès de puissance de spectre angulaire induit par les rebonds dus à un filtrage brutal des TOI. L'utilisation de la méthode d'interpolation galactique a permis de réduire les effets du filtrage sur le spectre de puissance angulaire.

La méthode utilisée est décrite dans les références [1] et [2]. L'estimation des dérives basses fréquences par la méthode d'interpolation galactique permet de produire une carte du ciel par simple coaddition. La carte est alors utilisée pour estimer le signal galactique. Elle est ensuite relue, la zone utilisée pour l'analyse CMB étant masquée. Les TOI obtenues sont ensuite retirées aux TOI de départ :

- TOI destriées : $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - \mathbf{d}$
- Fabrication de la carte par coaddition : $\mathbf{m} = [P^T P]^{-1} P^T \mathbf{b}'$
- Relecture de la carte : $\mathbf{b}'' = \mathbf{b} - P \mathbf{m}$
- Filtrage de \mathbf{b}'' .

La contribution galactique dans les TOI produites, \mathbf{b}'' , est réduite de façon importante. Le rebond induit par le filtrage de ces données est alors atténué, voir figure 4.8.

La présence de stries résiduelles dans \mathbf{m} , la carte produite par coaddition, montre que les dérives basses fréquences ne sont prises en compte que partiellement. Les stries sont plus apparentes lorsque le balayage s'effectue tangentiellement au plan galactique. En effet, dans ce cas, la portion de TOI interpolée représente une fraction de tour significative. L'erreur relative à l'estimation de ligne de base est alors plus importante. Cette limitation est intrinsèquement liée au procédé d'interpolation utilisé dans cet algorithme. En effet, du fait de l'interpolation, l'algorithme ne prend en compte que des dérives jusqu'à environ 0,1 Hz. Or, le bruit de dérive peut monter plus haut en fréquence, jusqu'à 1 Hz. D'autre part, l'algorithme filtre toutes les composantes des données à haute latitude. Idéalement, on voudrait ne retirer que les dérives sans altérer le signal. C'est pourquoi nous avons cherché à développer d'autres méthodes de destriage plus performantes.

4.2.2 Minimisation de la variance par pixel

Principe

Un des points essentiels des méthodes de fabrication de carte est l'exploitation des redondances, c'est à dire le fait qu'une même région du ciel est observée plusieurs fois au cours de l'expérience. Cette information peut être exploitée pour estimer les dérives basses fréquences. Le principe de la méthode est décrit dans [3] et [12] et repose sur l'utilisation de la variance par pixel comme mesure de la présence de dérives basses fréquences. La quantité à minimiser s'écrit donc :

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{pixel } p} \frac{1}{\sigma_p^2} \frac{1}{N_p} \sum_{\{i_p\} \in p} (b'_{i_p} - \bar{b}'_p)^2 \quad (4.21)$$

$\{i_p\}$ représente l'ensemble des échantillons pour lesquels le bolomètre pointe dans le pixel p , N_p est le nombre de mesures effectuées dans le pixel p . σ_p^2 est la variance du bruit dans le pixel p :

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma^2}{N_p - 1} \quad (4.22)$$

On a posé :

$$b'(t) = b(t) - d(t), \quad (4.23)$$

d modélisant les dérives basses fréquences. Le terme \bar{b}_p représente la moyenne, mesurée dans le pixel p , du signal corrigé des dérives :

$$\bar{b}_p = \frac{1}{N_p} \sum_{\{i_p\} \in p} b'_{i_p} \quad (4.24)$$

En utilisant le développement de d sur la base U :

$$d_i = \sum_k c_k U_{i k} \quad (4.25)$$

on peut écrire :

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{pixel } p} w_p \sum_{\{i_p\} \in p} \left(b_{i_p} - \bar{b}_p - \sum_k c_k U_{i_p k} + \frac{1}{N_p} \sum_{\{j_p\} \in p} \sum_k c_k U_{j_p k} \right)^2 \quad (4.26)$$

$$= \sum_{\text{pixel } p} w_p \sum_{\{i_p\} \in p} \left(b_{i_p} - \bar{b}_p - \sum_k c_k \underbrace{\left(U_{i_p k} - \frac{1}{N_p} \sum_{\{j_p\} \in p} U_{j_p k} \right)}_{U'_{i_p k}} \right)^2 \quad (4.27)$$

avec $w_p^{-1} = N_p \sigma^2 / (N_p - 1)$.

En minimisant 4.21 par rapport aux coefficients c_k caractérisant le développement de d sur la base U , on génère le système suivant :

$$\sum_{\text{pixel } p} w_p \sum_{\{i_p\} \in p} (b_{i_p} - \bar{b}_p) U'_{i_p l} = \sum_k \left(\sum_{\text{pixel } p} w_p \sum_{\{i_p\} \in p} U'_{i_p l} U'_{i_p k} \right) c_k \quad (4.28)$$

Ce système peut également s'écrire après un peu d'algèbre sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{pixel } p} w_p \sum_{\{i_p\} \in p} (b_{i_p} - \bar{b}_p) U_{i_p l} = \\ \sum_k \left(\sum_{\text{pixel } p} w_p \left(\sum_{\{i_p\} \in p} U_{i_p l} U_{i_p k} - \frac{1}{N_p} \sum_{\{i_p\} \in p} U_{i_p l} \sum_{\{j_p\} \in p} U_{j_p k} \right) \right) c_k \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mise en œuvre

Les deux points qui conditionnent la viabilité de cet algorithme sont les temps nécessaires à la fabrication et à la résolution du système linéaire 4.29. La matrice du système est bande diagonale de largeur $4\mathcal{N}_b$ et symétrique. Les \mathcal{N}_p pixels utilisés de la carte ont une redondance moyenne \mathcal{N}_w . Le nombre d'éléments temporels \mathcal{N}_d s'écrit aussi $\mathcal{N}_p \mathcal{N}_w$. Chacun de ces éléments intervient pour le calcul de $4\mathcal{N}_b^2$ éléments de matrice. La construction de celle-ci demande alors $2\mathcal{N}_b^2 \mathcal{N}_d \sim 10^{10}$ opérations.

Le nombre de coefficients \mathcal{N}_b à déterminer, et donc la taille du système, dépend de la plage fréquentielle caractérisant les dérives. L'étude du spectre du bolomètre indique un excès de puissance à basse fréquence associé aux dérives jusqu'à environ 1 Hz. En utilisant la relation

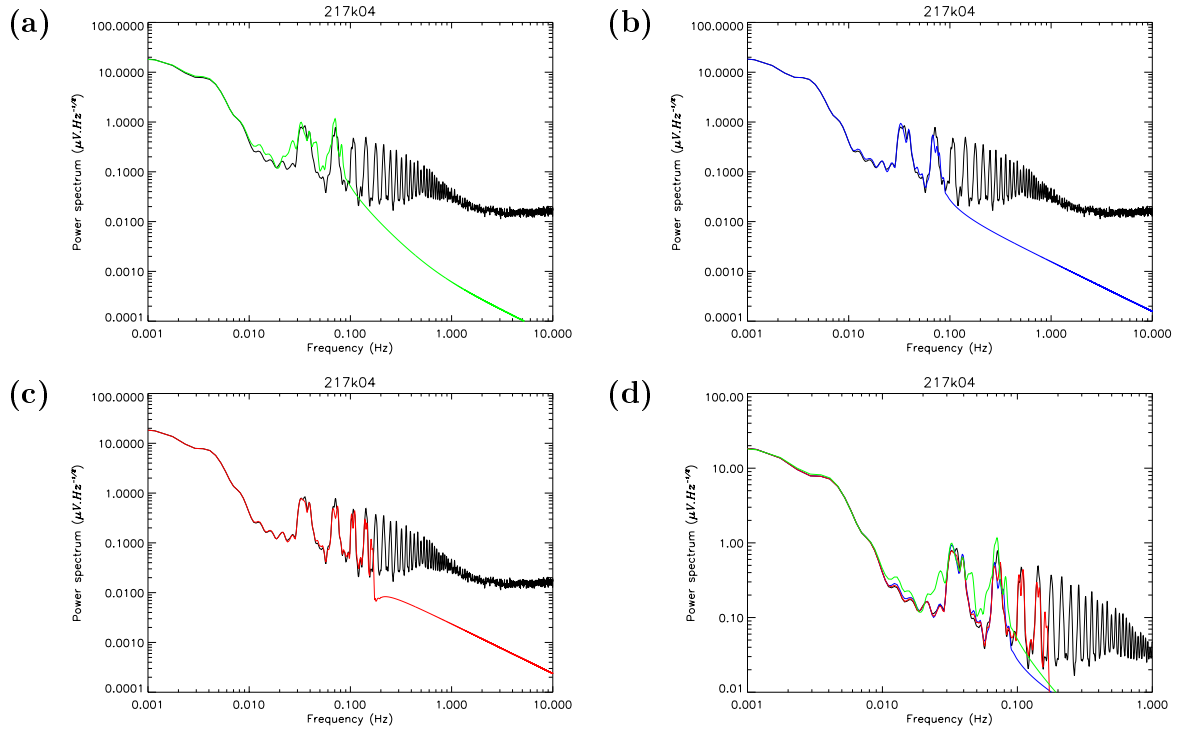


FIG. 4.9 – La courbe noire correspond au spectre de puissance du bolomètre 545k01 (KS3). Sur la figure (a), la courbe verte correspond au spectre de la ligne de base estimée pour $\Delta_p = 1000$. Sur la figure (b), la courbe bleue correspond au spectre de la ligne de base estimée par applications successives de l'algorithme jusqu'à $\Delta_p = 1000$. Sur la figure (c), la courbe rouge correspond au spectre de la ligne de base estimée par applications successives de l'algorithme jusqu'à $\Delta_p = 500$. La figure (d) montre la superposition des spectres associés aux trois estimations des dérives a, b et c.

4.16, on obtient une estimation du nombre de coefficients nécessaires pour destrier les données jusqu'au Hertz avec l'algorithme 4.29 :

$$\Delta_p = \frac{\mathcal{N}_d}{\mathcal{N}_c} \simeq 0,5 \frac{f_e}{f_c} \sim 10^2 \quad (4.30)$$

La valeur Δ_p correspond au pas de la grille sur laquelle les coefficients sont définis.

Application

L'utilisation directe de l'algorithme 4.29 avec un pas de grille $\mathcal{N}_d/\mathcal{N}_c \simeq 1000$ aboutit à un résultat décevant. En effet, on s'attend à éliminer les dérives jusqu'à 0,1 Hz. Or, on observe sur la figure 4.9 que l'algorithme n'est pas parvenu à estimer correctement la partie basse fréquence du spectre.

Cependant, l'utilisation de l'algorithme à une résolution faible, et donc un pas de grille plus élevé $\mathcal{N}_d/\mathcal{N}_c \simeq 10000$, donne des résultats plus satisfaisant. La partie basse fréquence est cette fois correctement estimée. Ces résultats indiquent que l'on ne peut pas déterminer simultanément les dérives sur une plage spectrale trop étendue.

Pour contourner le problème, nous avons appliqué l'algorithme successivement en augmentant la résolution, c'est à dire le nombre de coefficients. Les figures 4.9 et 4.10 montrent les résultats

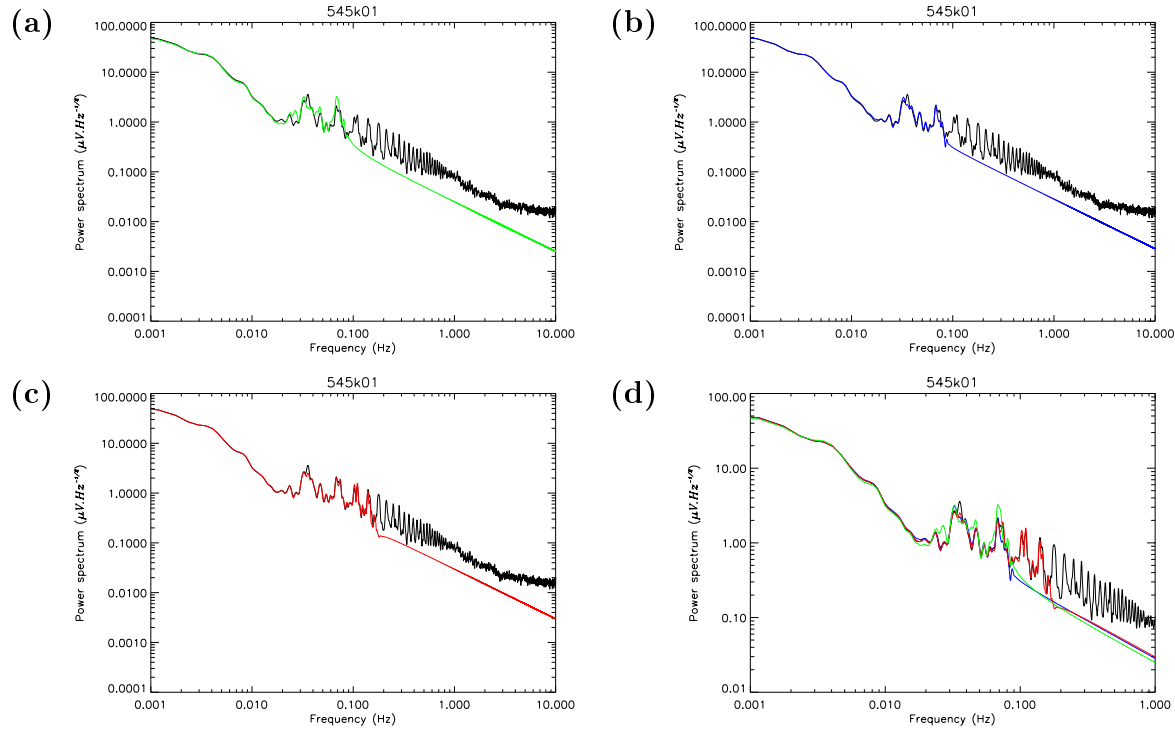


FIG. 4.10 – La courbe noire correspond au spectre de puissance du bolomètre 217k03 (KS3). Sur la figure (a), la courbe verte correspond au spectre de la ligne de base estimée pour $\Delta_p = 1000$. Sur la figure (b), la courbe bleue correspond au spectre de la ligne de base estimée par applications successives de l'algorithme jusqu'à $\Delta_p = 1000$. Sur la figure (c), la courbe rouge correspond au spectre de la ligne de base estimée par applications successives de l'algorithme jusqu'à $\Delta_p = 500$. La figure (d) montre la superposition des spectres associés aux trois estimations des dérives a, b et c.

obtenus en appliquant l'algorithme à deux voies d'Archeops. On peut constater que la plus grande partie des pics situés aux harmoniques de la fréquence de rotation se retrouve dans le spectre des dérives estimées par l'algorithme. Il y a donc dans les données une forte composante de bruit aux harmoniques de la fréquence de rotation.

Les cartes coadditionnées obtenues après applications de l'algorithme sont montrées figure 4.11. On observe que l'application successive de l'algorithme de destriage permet de réduire le niveau de stries. Cependant, la capacité de l'algorithme semble limitée, car il reste encore des stries résiduelles. On constate que l'application d'un filtre dans le domaine de Fourier à la même bande de fréquence supprime ces stries. Cela montre que les dérives ne sont pas suffisamment bien estimées.

L'observation des cartes 4.11 semble indiquer que l'on ne parvient plus à estimer la ligne de base lorsque le rapport $\mathcal{N}_d/\mathcal{N}_c$ devient inférieur à 1000. On vérifie de plus que ces résultats ne dépendent pas de la taille de pixellisation. La valeur $\mathcal{N}_d/\mathcal{N}_c=1000$ correspond à une fréquence de l'ordre de 0,1 Hz. On peut comprendre en fait qualitativement la raison de cette limitation. En effet, l'algorithme fonctionne en minimisant la variance par pixel. La valeur d'un pixel est d'autant mieux déterminée que la redondance est importante. La carte 2.5 montre que la redondance est très inhomogène. On voit nettement que les redondances ne sont importantes que sur deux zones de la carte. Cela signifie qu'il y a deux bonnes estimations du signal par tour. On s'attend donc

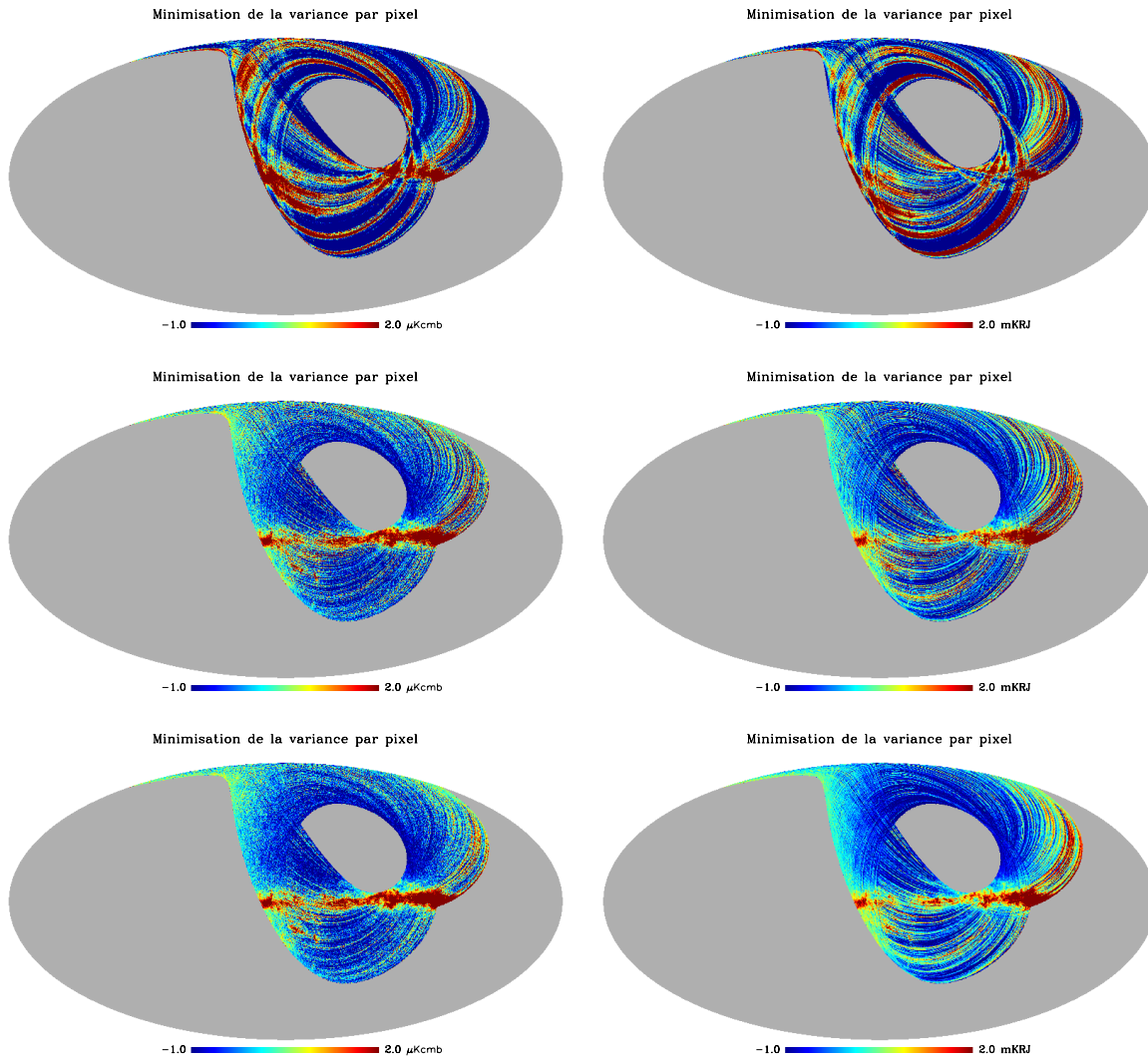


FIG. 4.11 – Les cartes de gauche correspondent au bolomètre 217k04. elles ont été obtenues par coaddition après soustraction de la ligne de base. Pour la première carte, la ligne de base a été estimée directement par l’algorithme de destriage en prenant $\Delta_p = 1000$. L’application directe de l’algorithme de minimisation de variance par pixel ne permet pas d’estimer correctement les dérives basses fréquences. La carte coadditionnée correspondante est très striée. Les deux cartes suivantes ont été obtenues en procédant par étapes successives. Pour la deuxième carte, la ligne de base a été estimée successivement avec Δ_p valant 10000, 2000 et 1000. Pour la dernière carte, l’algorithme de destriage a été appliqué une quatrième fois avec $\Delta_p = 500$. Les cartes de droite, relatives au bolomètre 545k01, ont été obtenues de la même façon.

à ce l’on puisse estimer avec ce procédé les dérives jusqu’à une fréquence de l’ordre de $2f_{spin}$.

La minimisation de la variance par pixel est un procédé adapté pour estimer les dérives à grande échelle. Cependant, il ne permet pas, pour Archeops, de produire des cartes destriées. Cette limitation est intimement liée à la stratégie d’observation d’Archeops, et de la faible redondance qu’elle implique. Nous avons donc exploré d’autres techniques de destriage, plus adaptées pour traiter les dérives à plus petite échelle angulaire.

4.2.3 Minimisation de la variance perpendiculaire à la direction de balayage

Principe

Les résultats limités du destriage basé sur la minimisation de la variance par pixel nous ont amené à changer de stratégie. Aussi, au lieu d'estimer le degré de stries à l'aide d'une carte, nous avons cherché à utiliser directement les données temporelles.

L'algorithme que nous avons développé repose sur le principe suivant¹⁷ : les stries, induites par les dérives, créent un fort gradient du signal dans la direction perpendiculaire au balayage. Aussi, pour quantifier le niveau de stries, on peut utiliser la variance des mesures perpendiculaire au balayage. En fait, pour tenir compte de la variabilité naturelle du signal du ciel, nous rapportons la dispersion des données dans la direction perpendiculaire au balayage à la dispersion dans la direction parallèle. On est donc amené à poser comme mesure du niveau de stries :

$$\mathcal{M} = \sum_{\{i\}} \frac{\sigma_{i\perp}^2}{\sigma_{i\parallel}^2} = \sum_{\{i\}} \frac{\frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} (b_j - \bar{b}_{i\perp})^2}{\frac{1}{N_{\parallel}} \sum_{j \in \parallel} (b_j - \bar{b}_{i\parallel})^2} \quad (4.31)$$

Les symboles \parallel et \perp font références respectivement à la direction de balayage et à la direction perpendiculaire. Ainsi, $\sigma_{i\perp}^2$ correspond à la variance le long de la direction perpendiculaire à la direction de balayage au point i . $\sigma_{i\parallel}^2$ correspond à la variance le long de la direction de balayage.

Le terme $\bar{b}_{i\parallel}$ désigne la moyenne, autour de l'échantillon i , prise le long du balayage. Le terme $\bar{b}_{i\perp}$ correspond à la moyenne prise perpendiculairement à la direction du balayage. La somme $\sum_{j \in \parallel}$ porte, par exemple, sur N_{\parallel} mesures effectuées après l'instant j , tandis que la somme $\sum_{j \in \perp}$ porte sur N_{\perp} voisins suivant une direction perpendiculaire au balayage.

Le choix d'un estimateur de dérives tel que 4.31 est basé sur l'hypothèse d'isotropie du signal. Le rapport $\sigma_{\perp}^2/\sigma_{\parallel}^2$ quantifie l'anisotropie relative aux directions transverse et parallèle au balayage.

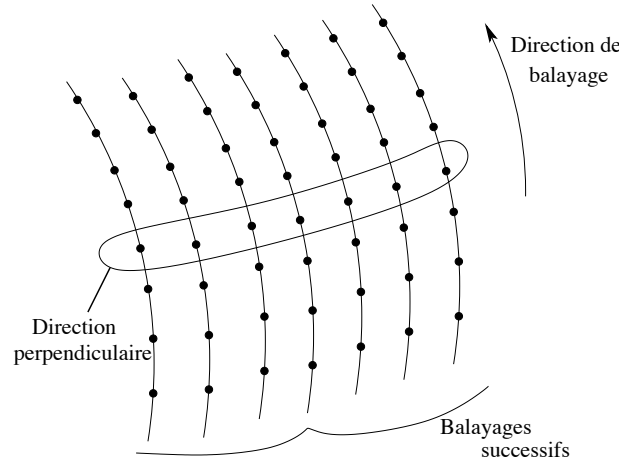
Si la définition de la direction de balayage ne pose pas de problème, la définition de la direction perpendiculaire au balayage est moins évidente. Nous avons choisi de définir la direction perpendiculaire au balayage à l'instant i par l'ensemble des N points de mesure correspondant aux instants $\{\dots i-T(i)-T(i-T(i)), i-T(i), i, i+T(i), i+T(i)+T(i+T(i))\dots\}$, le terme $T(i)$ désignant la période de rotation apparente à l'instant i . Cette dernière est déterminée par le temps de retour de la même étoile dans la barrette du senseur stellaire. La figure 4.12 montre la disposition des directions parallèle et perpendiculaire au balayage.

Les dérives d sont estimées en minimisant \mathcal{M} par rapport aux coefficients c_k de son développement sur la base de fonctions choisies U :

$$\mathcal{M} = \sum_{\{i\}} \frac{\frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} (b'_j - \bar{b}'_{i\perp})^2}{\frac{1}{N_{\parallel}} \sum_{j \in \parallel} (b'_j - \bar{b}'_{i\parallel})^2} \quad (4.32)$$

où le terme b' est défini par 4.23. Les coefficients c_k apparaissent au numérateur et au dénominateur de l'expression 4.32. La minimisation de 4.32 ne conduit donc pas à un système linéaire. On note cependant que si la zone dans laquelle les variances sont évaluées est suffisamment restreinte, les dérives interviennent peu sur le terme au dénominateur.

¹⁷ Je tiens à remercier François-Xavier Désert qui nous a suggéré d'explorer cette voie...

FIG. 4.12 – *Disposition des directions parallèle et perpendiculaire au balayage.*

Le spectre des dérives étant limité à 1 Hz, on va estimer une ligne de base qui ne possède pas de hautes fréquences. On fixe le nombre de points N_{\parallel} pris dans la direction parallèle. Seules les fréquences supérieures à $f_m \simeq f_e/(2N_{\parallel})$ ont alors une influence sur une portion de données formée de N_{\parallel} échantillons. En choisissant par exemple 30 échantillons dans la direction parallèle au balayage, on obtient $f_m \simeq 2,5$ Hz. La ligne de base à estimer d_t n'ayant pas de composantes spectrales au-delà du Hertz, cette dernière ne modifie donc pas la valeur de la variance parallèle σ_{\parallel}^2 . On peut alors écrire :

$$\sum_{j \in \parallel} (b'_j - \bar{b}'_{i \parallel})^2 = \sum_{j \in \parallel} (b_j - \bar{b}_{i \parallel})^2 = N_{\parallel} \sigma_{i \parallel}^2 \quad (4.33)$$

Cette simplification a été validée numériquement. Le terme à minimiser devient alors :

$$\mathcal{M} = \sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i \parallel}^2} \frac{1}{N_{\parallel}} \sum_{j \in \perp} (b'_j - \bar{b}'_{i \perp})^2 \quad (4.34)$$

En utilisant le développement de l'estimation des dérives d sur la base de fonction U :

$$d_i = \sum_k c_k U_{i k}, \quad (4.35)$$

on peut écrire 4.34 sous la forme :

$$\mathcal{M} = \sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i \parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} \left(b_j - \bar{b}_{i \perp} - \sum_k c_k U_{j k} \right)^2 \quad (4.36)$$

$$= \sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i \parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} \left(b_j - \bar{b}_{i \perp} - \sum_k c_k \underbrace{\left(U_{j k} - \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j' \in \perp} U_{j' k} \right)}_{U'_{j k}} \right)^2 \quad (4.37)$$

où N_{\perp} est le nombre de points utilisés pour calculer la variance transverse au point i .

La minimisation de 4.37 conduit finalement au système linéaire suivant :

$$\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} (b_j - \bar{b}_{i\perp}) U'_{jl} = \sum_k \left(\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} U'_{jl} U'_{jk} \right) c_k \quad (4.38)$$

On note que la structure de ce système est similaire à celle du système 4.28. Ce système peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} (b_j - \bar{b}_{i\perp}) U_{jl} = \sum_k \left(\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \frac{1}{N_{\perp}} \left(\sum_{j \in \perp} U_{jl} U_{jk} - \frac{1}{N_{\perp}} \sum_{j \in \perp} U_{jl} \sum_{j \in \perp} U_{jk} \right) \right) c_k \quad (4.39)$$

Mise en œuvre

On doit, dans un premier temps, choisir N_{\perp} et N_{\parallel} de sorte que les variances transverse et parallèle aient la même valeur lorsqu'il n'y a pas de dérives. Pour cela, l'extension de la zone doit être identique dans les directions parallèle et transverse. Ainsi, une fois fixé le nombre de points définissant la direction parallèle, le nombre de points utilisés dans la direction perpendiculaire N_{\perp} est alors choisi de façon à ce que l'extension angulaire soit identique dans les deux directions.

En considérant que la ligne de visée parcourt un angle de $360^\circ \times \sin(50)$ par tour, N_{\parallel} échantillons forment une extension L_{\parallel} telle que

$$L_{\parallel} = 9,2 N_{\parallel} / f_e \quad \text{en degrés} \quad (4.40)$$

On veut la taille angulaire L_{\perp} formée par les N_{\perp} points formant la direction transverse soit égale à L_{\parallel} . En attribuant le déplacement des balayages uniquement à la rotation de la Terre, le décalage entre deux balayages est de l'ordre de 7,5'. On a donc :

$$L_{\perp} = 0,125 N_{\perp} \quad \text{en degrés} \quad (4.41)$$

Pour avoir $L_{\perp} = L_{\parallel}$, on doit donc vérifier la relation :

$$N_{\perp} \simeq 74 N_{\parallel} / f_e \quad (4.42)$$

En utilisant le fait que la fréquence d'échantillonnage f_e est de l'ordre de 150 Hz, on obtient $N_{\perp} = N_{\parallel}/2$. Avant d'appliquer l'algorithme, on effectue un sous-échantillonnage des données en moyennant un point sur deux. Cette opération présente deux avantages. D'une part le volume de données est divisé par deux. D'autre part, avec le jeu de données réduit, on a $N_{\perp} = N_{\parallel}$. Le calcul des variances s'effectue alors avec le même nombre de points dans les directions parallèle et transverse. On effectue alors des sondages du ciel géométriquement équivalents.

Il reste à fixer le nombre $N_{\perp} = N_{\parallel}$ de points délimitant l'extension des zones de ciel considérées. Celles-ci doivent être suffisamment étendues pour être sensibles aux basses fréquences. Elles doivent également être assez petite pour que l'hypothèse d'isotropie soient vérifiée. En pratique, on constate que prendre 15 échantillons dans la direction parallèle au balayage permet de satisfaire

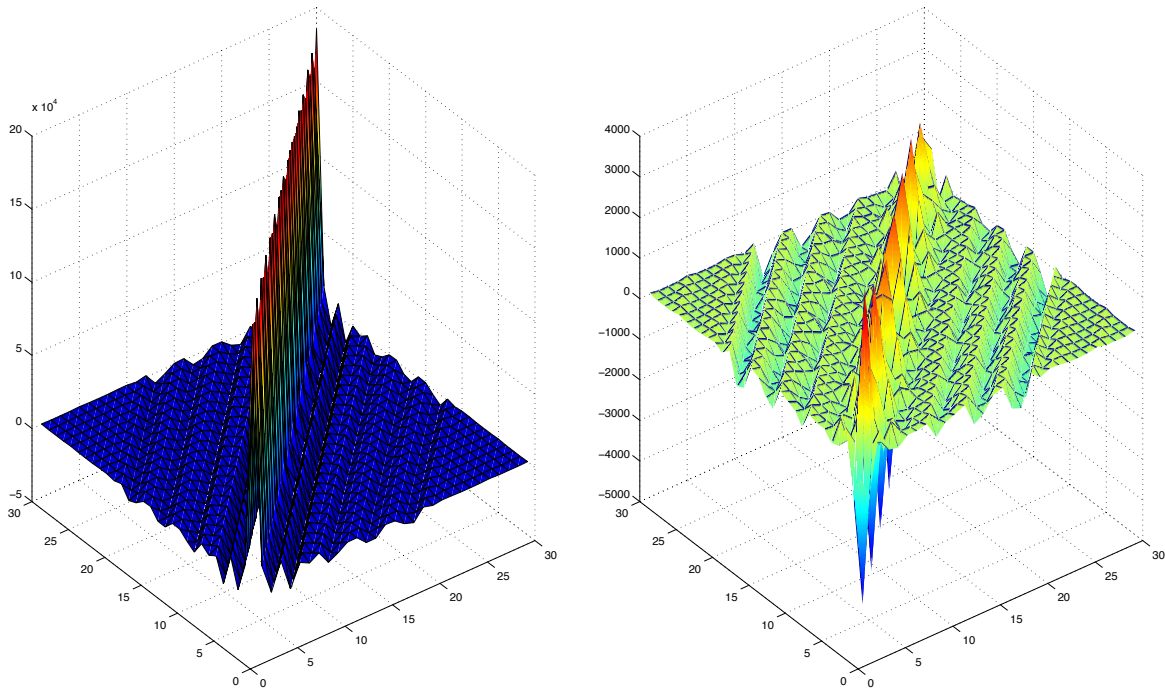


FIG. 4.13 – La figure de droite montre une partie (sous-matrice de taille 30×30) de la matrice du système 4.38. Cette matrice est à dominante diagonale. La figure de droite montre l'effet du sous-échantillonnage des données sur la détermination de cette matrice. La différence entre les deux matrices, à un facteur de normalisation près, est de l'ordre de 1% pour les éléments proches de la diagonale. En pratique, le sous-échantillonnage n'altère pas la détermination des dérivées.

à ces deux conditions. On forme alors une zone d'extension d'environ $2,5^\circ \times 2,5^\circ$ sur le ciel, échantillonnée par 15×15 points.

La façon dont le calcul de la variance parallèle est effectué sur chaque portion de ciel n'a pas encore été précisée. Ce point sera discuté dans la section suivante.

Evaluons le nombre d'opérations associées au remplissage du système 4.39. On note que la matrice du système est symétrique et bande diagonale. Pour chaque élément de TOI, on doit considérer les N_\perp éléments formant la ligne transverse. Ces éléments sont impliqués dans le calcul de $4\mathcal{N}_b^2$ éléments de matrice. En tenant compte de la symétrie, le nombre d'opérations nécessaires pour le calcul de la matrice du système est donc de l'ordre de $2\mathcal{N}_b^2 N_\perp N_d$.

Le fait d'avoir à calculer la variance transverse augmente le nombre d'opérations d'un facteur N_\perp par rapport aux algorithmes précédents. Toutefois, il est clair que les variances calculées aux points i et $i+1$ sont très similaires, compte tenu du fait que les dérivées évoluent lentement. Aussi, les résultats ne sont pas modifiés si la sommation intervenant dans le calcul des éléments de la matrice du système n'est pas effectuée sur tous les points de la TOI, mais seulement sur un point pour N_\perp échantillons. Cette opération revient de nouveau à sous-échantillonner les données. La figure 4.13 montre l'effet induit par ce sous-échantillonnage sur la matrice du système. On observe que cette dernière est très peu altérée par le procédé.

Application

L'utilisation directe de l'algorithme 4.39 avec un nombre élevé de coefficients ne permet pas, comme pour l'algorithme de minimisation de variance par pixel, d'estimer correctement les

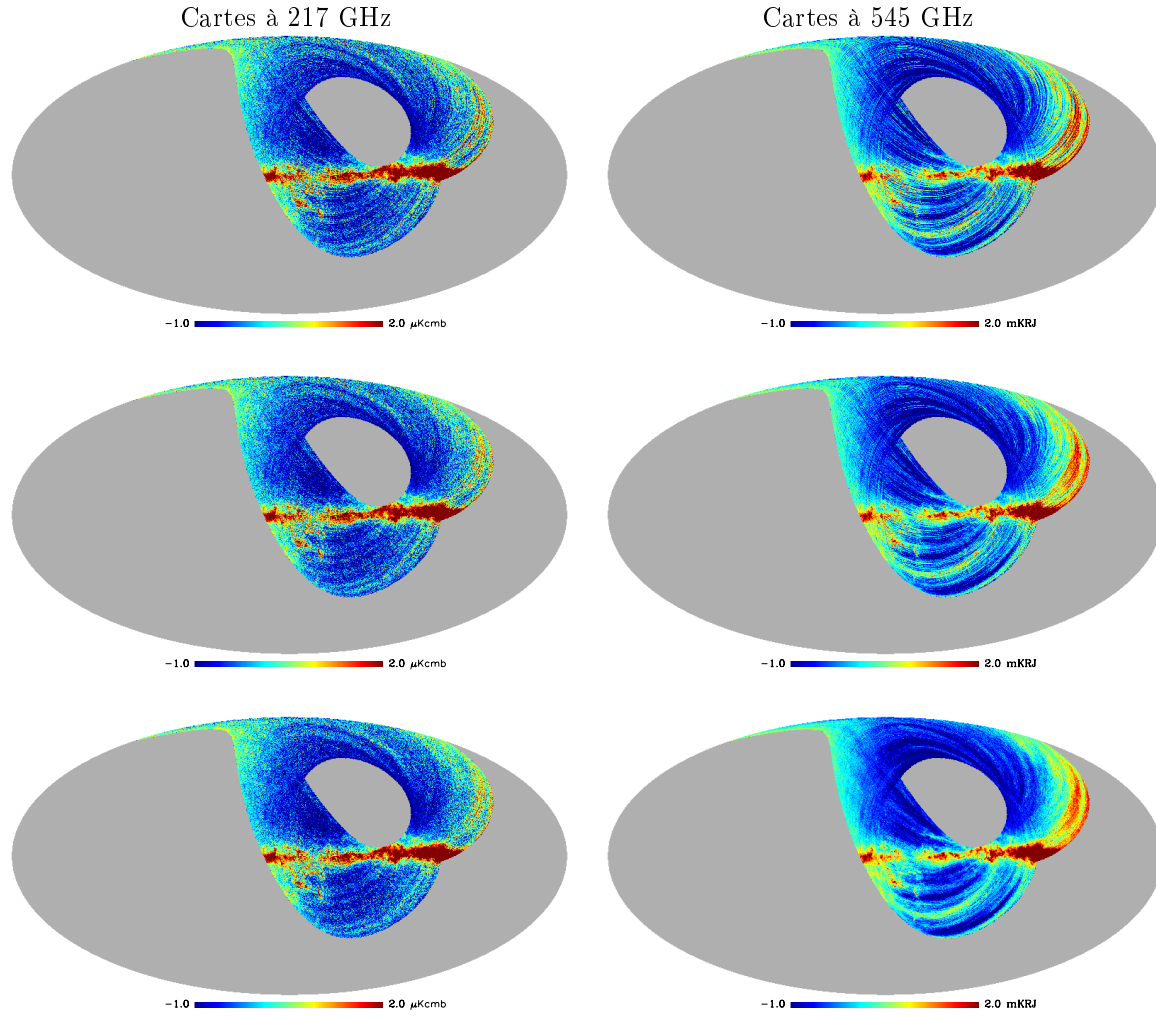


FIG. 4.14 – Les cartes de gauche correspondent au bolomètre 217k04. Elles ont été obtenues par coaddition après soustraction de la ligne de base. La ligne de base a été estimée une première fois en utilisant l’algorithme de minimisation de variance par pixel. Puis, nous avons appliqué l’algorithme de minimisation de variance transverse avec Δ_p valant 4000, 1000, 500 et 300. Les cartes correspondent à ces trois dernières valeurs. Les cartes de droites sont relatives au bolomètre 545k01 et ont été obtenues de la même façon.

dérives. L’algorithme doit être appliqué successivement avec une résolution de plus en plus fine.

Cependant, l’algorithme a été développé pour traiter les dérives sur de petites échelles angulaires. Il est de ce point de vue moins bien adapté que l’algorithme basé sur la minimisation de la variance par pixel pour déterminer les dérives à très grande échelle. C’est pourquoi les TOI ont été au préalable destriées en minimisant la variance par pixel. Puis, nous avons appliqué l’algorithme de minimisation de variance transverse avec Δ_p valant 4000, 1000, 500 et 300.

La façon dont on effectue le calcul de la variance parallèle joue un rôle important sur le fonctionnement de l’algorithme. On dispose d’une évaluation pour chaque point formant la ligne transverse. Or, il n’y a pas de raison particulière pour en privilégier une. C’est pourquoi, on utilise comme estimateur de la variance parallèle la valeur moyenne de cette dernière sur chaque

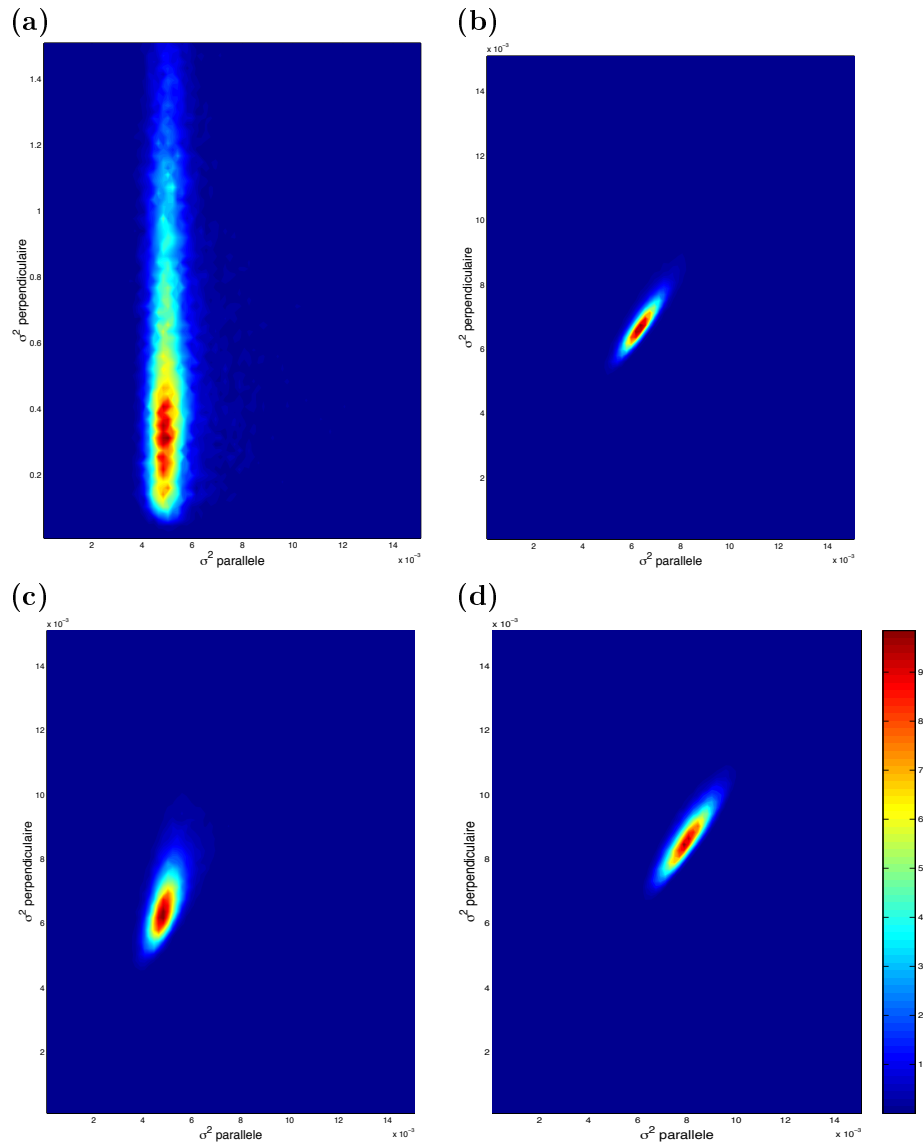


FIG. 4.15 – Ces figures montrent la distribution des valeurs de la variance transverse σ_{\perp}^2 en fonction de la variance parallèle σ_{\parallel}^2 . Les variances sont en μV^2 . Les échelles verticales et horizontales sont différentes sur la figure (a) et identiques sur les autres. La figure (a) montre la distribution des variances des données avant destriage. La présence de dérives se traduit par une valeur très élevée de σ_{\perp}^2 . La figure (b) montre cette même distribution en considérant des données simulées (galaxie + bruit blanc) sans dérives. Les figures (c) et (d) montrent la distribution des variances des données après destriage. La figure (c) correspond au bolomètre à 545 GHz et la figure (d) à un bolomètre à 217 GHz (217k03). Après application de l'algorithme de destriage, la variance transverse est ramenée à un niveau comparable à celui de la variance parallèle. Toutefois, le niveau de variance transverse dans les données à 545 GHz est plus important pour les données à 217 GHz. Ce niveau de variance transverse plus élevé est lié à la présence de stries résiduelles comme l'indique la figure 4.14.

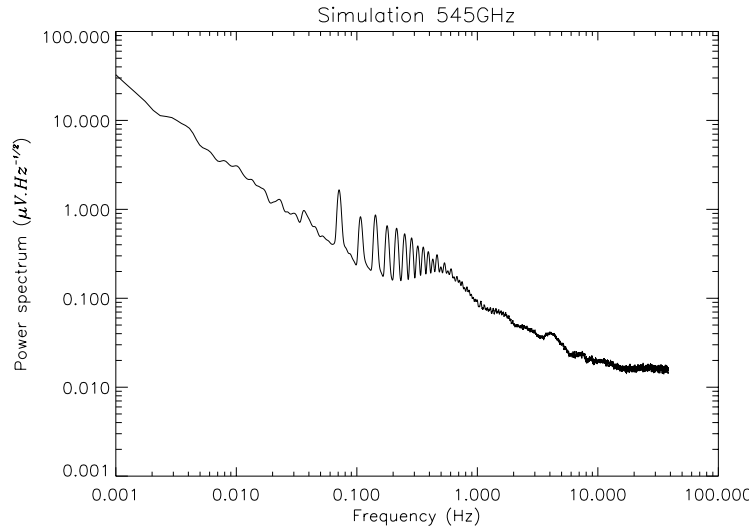


FIG. 4.16 – La figure montre le spectre de puissance lissé des TOI simulées correspondant à la voie à 545 GHz.

portion de ciel considérée. De cette façon, on augmente la précision statistique de l'estimateur d'un facteur $\sqrt{N_{\parallel}}$. La distribution des valeurs de variances avant et après destriage est donnée figure 4.15. Du fait de la présence des dérives à basse fréquence, la variance transverse est beaucoup plus importante que la variance parallèle. On constate que l'algorithme de destriage parvient à réduire la variance transverse au même niveau que la variance parallèle. On obtient le même type de distribution lorsque l'on détermine les variances sur des données simulées sans dérives basses fréquences. Notons que la forme de la distribution montre que les valeurs de σ_{\perp} et σ_{\parallel} sont bien corrélées. Cette corrélation est liée à l'isotropie du signal sur les portions de ciel considérées.

La figure 4.14 montre les cartes produites avec les TOI destriées avec la minimisation de la variance transverse. On observe que les stries disparaissent progressivement des cartes. Cependant, des inhomogénéités subsistent à grandes échelles angulaires. Celles-ci sont plus marquées sur la carte relative au bolomètre à 545 GHz. C'est en effet le bolomètre pour lequel les dérives sont les plus importantes. D'autre part, c'est également le bolomètre le plus sensible au signal de l'atmosphère. La présence de nuages d'ozone induit un signal parasite quasi-synchrone avec la rotation. De plus, un des modes de balancement de la nacelle correspond à la fréquence de rotation. Ce mode de pendulation induit également un signal synchrone avec la rotation. L'algorithme de destriage par minimisation de la variance transverse détecte les dérives en observant l'évolution des données temporelles tour après tour. La méthode est donc par essence peu efficace pour prendre en compte les signaux parasites synchrones avec la rotation.

4.2.4 Destriage pour Archeops

Nous avons développé deux algorithmes de destriage complémentaires et discuté qualitativement de leurs propriétés. Nous avons en particulier vu comment enchaîner les algorithmes pour effectuer le destriage. Nous allons maintenant tester ces derniers sur des données d'Archeops simulées afin de valider et d'optimiser la méthode de destriage.

Voie	Niveau de bruit blanc σ	Fréquence “genou” f_k	Indice spectral γ
217 GHz	$2 \cdot 10^{-2} \mu V.Hz^{-1}$	0,2 Hz	1,3
545 GHz	$2 \cdot 10^{-2} \mu V.Hz^{-1}$	0,4 Hz	1,3

TAB. 4.1 – *Caractéristiques des spectres utilisés pour produire les données simulées.*

Données simulées

Nous avons simulé deux jeux de données, correspondant aux voies à 217 GHz et 545 GHz. Ces données ont été produites à partir de cartes SFD [13][5]. Chaque carte est lue en utilisant le pointage d’Archeops pour produire des TOI. Du bruit de type 1/f est ensuite ajouté au signal temporel obtenu :

$$d_{sim} = Pm_{gal} + n \quad (4.43)$$

où m_{gal} est une carte SFD, P la matrice de pointage et n le bruit en 1/f. Le bruit n généré est gaussien et est caractérisé par le spectre 4.1. Les valeurs des paramètres ont été prises pour correspondre aux caractéristiques d’Archeops. Elles sont indiquées dans la table 4.1.

La figure 4.16 montre le spectre de puissance des données simulées correspondant à la voie à 545 GHz. D’un point de vue pratique, les données simulées vont permettre d’évaluer l’efficacité des algorithmes dans deux régimes. La voie 545 GHz correspond au cas où les dérives sont importantes, et celle à 217 GHz au cas où les dérives sont plus faibles.

Efficacité du destriage

Nous avons appliqué l’algorithme de destriage par minimisation de la variance par pixel sur la simulation à 545 GHz. L’algorithme a été utilisé successivement en augmentant progressivement le nombre de coefficients caractérisant les dérives. Le nombre de coefficients utilisés est spécifié par le paramètre Δ_p . Ce dernier correspond au rapport entre le nombre d’échantillons de données considérées et le nombre de coefficients, c’est à dire au pas de la grille sur laquelle les coefficients à

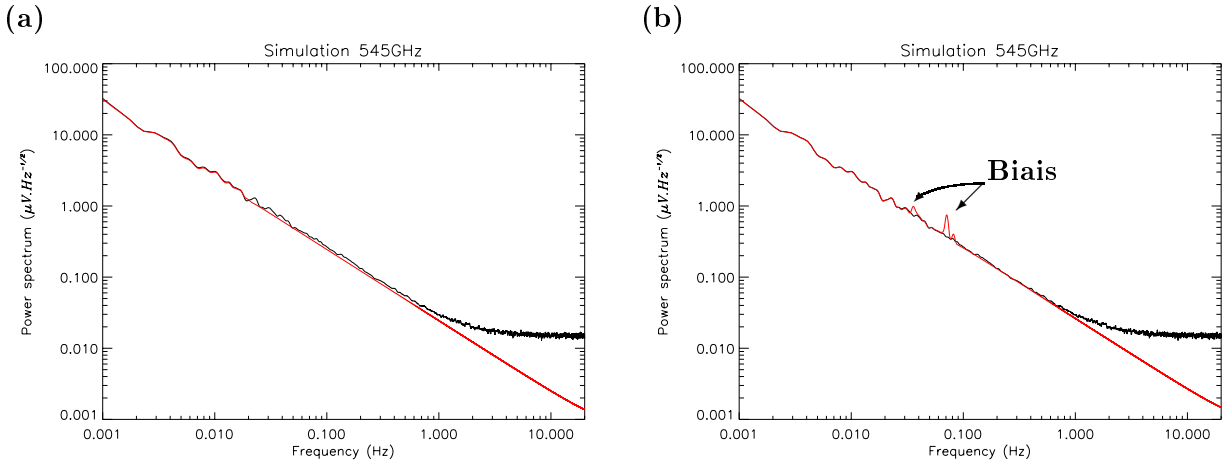


FIG. 4.17 – On compare le spectre des dérives estimées par minimisation de la variance par pixel (en rouge) avec celui des dérives utilisées pour effectuer la simulation (en noir). Les spectres sont similaires lorsque la plage fréquentielle du destriage est inférieure à $2 f_{spin}$, figure (a). Cependant si la plage englobe des fréquences supérieures à $2 f_{spin}$, figure (b), des biais apparaissent.

déterminer sont définis. En augmentant le nombre de coefficients, on élargit la plage fréquentielle $[0 - f_c]$ à laquelle l'algorithme opère, f_c et $1/\Delta_p$ étant proportionnels.

La figure 4.17 montre le spectre de l'estimation des dérives. On observe que lorsque f_c dépasse deux fois la fréquence de rotation f_{spin} , un pic apparaît à $2 f_{spin}$ dans le spectre. Ce biais est dû au manque de redondances, propre à la stratégie de balayage d'Archeops. Ce résultat indique que l'algorithme ne doit pas être utilisé avec une fréquence de coupure f_c supérieure à $2f_{spin}$. Cette prescription avait été établie intuitivement dans la section 4.2.2. Le destriage, pour les fréquences plus grandes que $2f_{spin}$, s'effectue donc avec l'algorithme de minimisation de variance transverse.

Pour quantifier la qualité du destriage, on compare les données destriées avec des données simulées sans bruit 1/f. Les spectres de puissance correspondants sont donnés figure 4.18. Les résultats montrent que les algorithmes parviennent à réduire le niveau des dérives basses fréquences. L'erreur correspondante est compatible avec le niveau du bruit blanc, excepté pour les harmoniques de la fréquence de rotation. En effet, comme nous l'avons déjà noté, l'algorithme de minimisation de la variance transverse est peu efficace pour lutter contre les bruits synchrones avec la rotation du fait que ceux-ci ne perturbent pas la variance transverse.

La figure 4.19 montre les cartes obtenues en coadditionnant les TOI après destriage. On observe que les stries ont quasiment disparu. On note que la carte d'erreur, obtenue en effectuant la différence entre la carte coadditionnée et la carte SFD, est uniforme pour les deux simulations. Cela montre que les structures galactiques ne sont pas altérées par le destriage.

L'efficacité du destriage repose sur le fait que le signal soit isotrope vis-à-vis des directions de balayage. Cette hypothèse n'est en fait pas vérifiée par tous les balayages. Dans les zones situées au bord du plan galactique, il existe un gradient de signal galactique. Le signal n'est donc clairement pas isotrope dans ces zones. On peut distinguer deux cas de figure :

- La direction de balayage est perpendiculaire au plan galactique. C'est la configuration de balayage du début du vol. Pour les points situés en bordure galactique, le gradient de signal est aligné avec la direction de balayage. La variance parallèle est donc plus importante que la variance transverse. Le rapport $\sigma_{\perp}/\sigma_{\parallel}$ est faible. Ces points ont alors peu de poids dans la matrice du système, et ne sont donc pas problématiques.
- La direction de balayage est parallèle au plan galactique. Ce type de balayage a lieu en fin de vol, comme indiqué sur la figure 4.7. Cette fois-ci, le gradient de signal est perpendiculaire avec la direction de balayage. La variance parallèle est donc plus faible que la variance transverse. L'algorithme de minimisation va ajuster la ligne de base pour corriger ce gradient et donc introduire un biais.

Pour mettre en évidence la présence de biais éventuels, nous avons appliqué le destriage par minimisation de variance transverse sur des TOI simulées d_{sim} sans dérives basses fréquences :

$$d_{sim} = \text{signal galactique} + \text{bruit blanc} \quad (4.44)$$

On compare alors la ligne de base estimée avec le niveau de bruit. Les résultats sont illustrés figure 4.20. On observe que des biais apparaissent si :

- la fréquence de destriage f_c est élevée. Les points pathologiques sont situés sur une fraction de cercle assez réduite. Lorsque les dérives sont estimées avec peu de coefficients, la contribution de ces points est marginale. Elle ne l'est plus lorsque la fréquence f_c devient plus grande que f_{spin} .
- l'intensité du signal galactique est importante. Si, dans le plan galactique, le rapport signal sur bruit est faible, le gradient dû au signal galactique induit un biais d'autant plus faible.

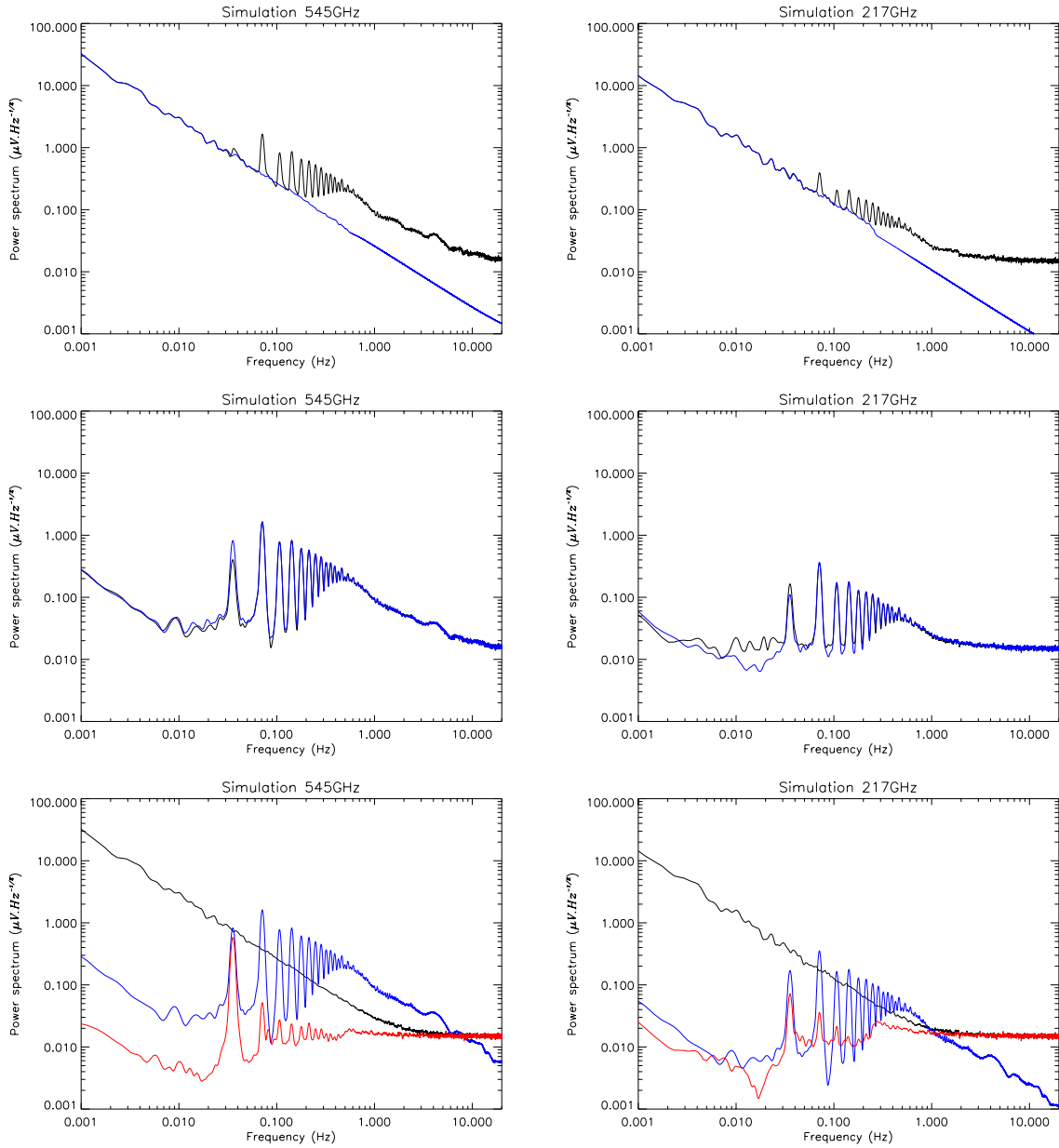


FIG. 4.18 – Résultats obtenus en appliquant successivement les algorithmes de minimisation de la variance par pixel puis de minimisation de la variance transverse sur les simulations. Les figures situées à gauche correspondent à la voie à 545 GHz, et celles de droite à la voie à 217 GHz. Les figures de la première ligne montrent le spectre des données simulées (en noir) et le spectre des dérivées estimées (en bleu). Sur la deuxième ligne, on observe le spectre des TOI destriées (en bleu) et le spectre de données simulées correspondant à somme du signal du ciel et d'un bruit blanc. Sur la dernière ligne, on observe 3 spectres. Les courbes en noir et en bleu correspondent respectivement au spectre du bruit ($1/f$ + bruit blanc) et au signal du ciel. La courbe en rouge correspond au spectre de la différence entre la ligne de base estimée et le bruit utilisé pour la simulation.

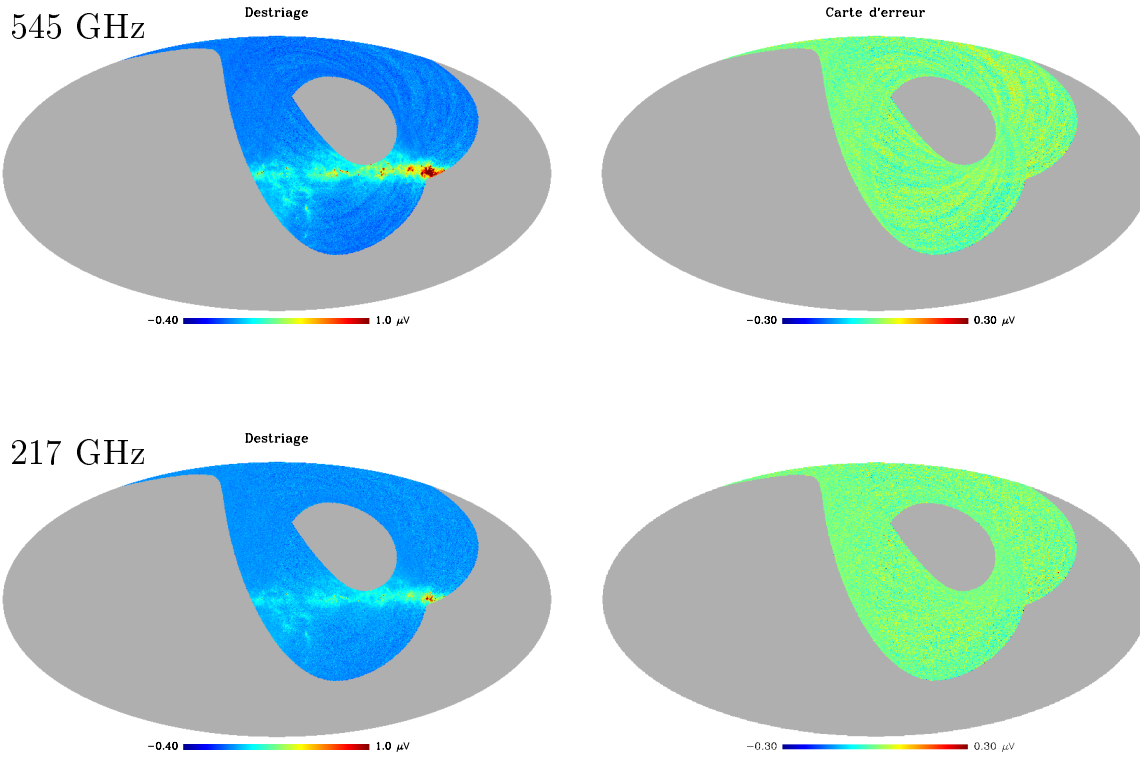


FIG. 4.19 – Cartes obtenues par coaddition après applications successives des algorithmes de destriage sur les données simulées. Les cartes à droite correspondent aux cartes de bruit, c'est à dire à la différence entre la carte destriée et la carte utilisée pour produire les données simulées.

Ainsi, lorsque l'algorithme de destriage est utilisé avec un nombre de coefficients suffisamment faible, de sorte que $\Delta_p > 200$, la ligne de base est estimée sans biais. Des biais apparaissent cependant si le pas de la grille devient plus petit que 200. L'algorithme de destriage semble donc ne pas pouvoir être utilisé aux fréquences correspondant à $\Delta_p < 200$.

Toutefois, une astuce permet d'appliquer l'algorithme sans induire de biais. Pour cela, il suffit de retirer des données une estimation du signal galactique. L'estimation du signal peut être effectuée avec des données destriées, avec $\Delta_p > 200$. On procède alors de la façon suivante :

- Fabrication de la carte coadditionnée avec les TOI. Les destriages préliminaires permettent de produire des cartes par coaddition.
- Utilisation d'un masque pour sélectionner les zones où l'émission galactique est importante.
- Relecture de la carte avec masque. Les TOI correspondantes sont retranchées aux données initiales.

On applique alors le destriage sur les TOI où l'essentiel du signal galactique a été oté. Les gradients de signal qui induisent les biais sont fortement atténués. La ligne de base est alors estimée correctement.

Effet sur le CMB

On cherche à quantifier l'effet du destriage sur le signal du CMB. On considère pour cela le cas où les données temporelles contiennent uniquement le signal du CMB. On applique ensuite

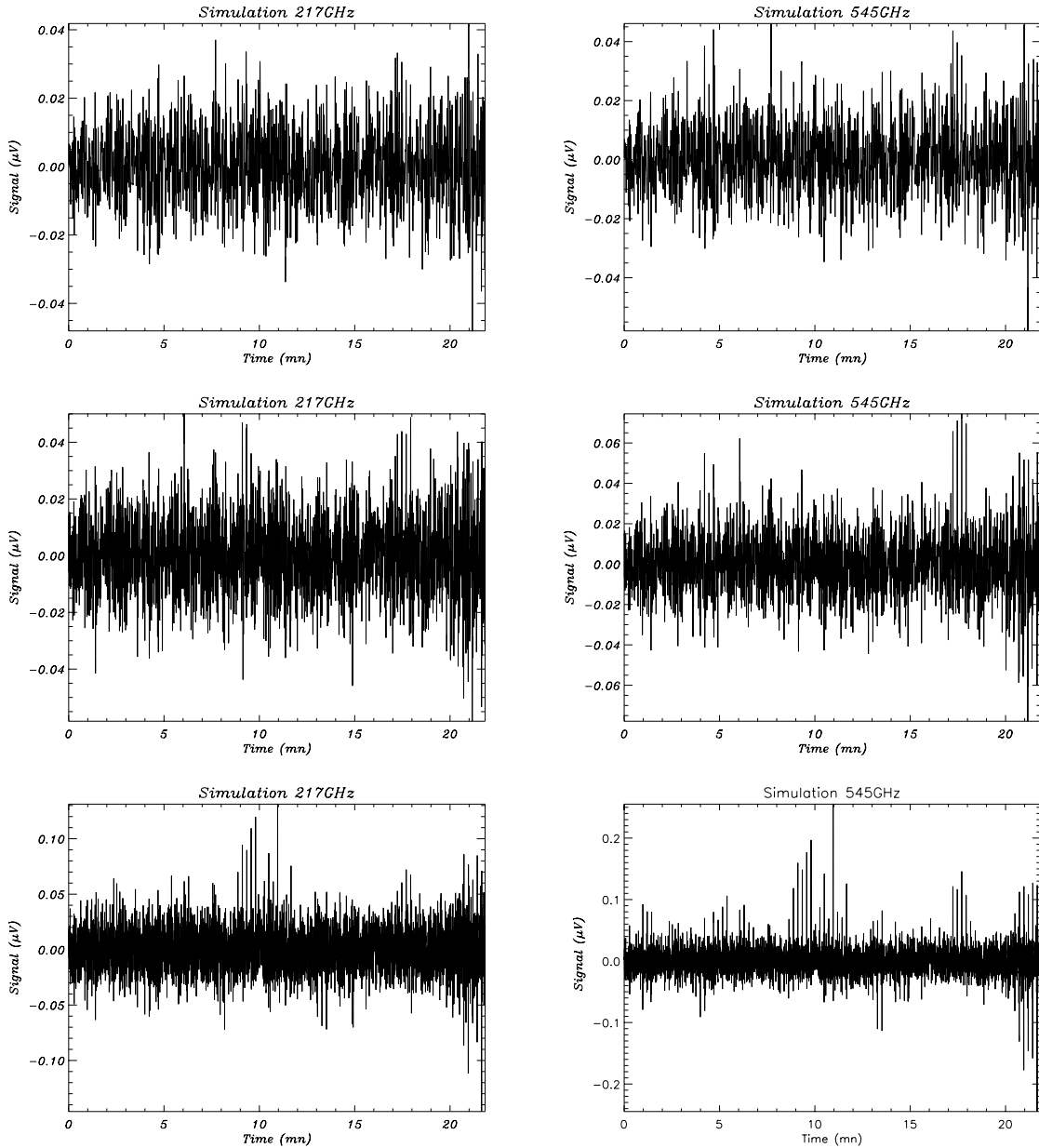


FIG. 4.20 – Biais induits par la Galaxie lors du destriage par minimisation de la variance transverse. Les figures montrent la ligne de base estimée à partir de TOI correspondant à la somme du signal galactique et du bruit blanc. Cette partie correspond aux trente dernières minutes de la phase nocturne du vol KS3. La variance du bruit blanc est de $0,13 \mu\text{V}$. Le destriage a été effectué avec pour la première ligne $\Delta_p = 300$, pour la deuxième ligne $\Delta_p = 200$, et pour la dernière ligne $\Delta_p = 100$. La ligne de base estimée reste plate avec des fluctuations nettement inférieures au niveau de bruit tant que la fréquence de destriage $f_c \sim 1/\Delta_p$ n'est pas trop grande.

l'algorithme de destriage sur ces données. La figure 4.21 montre la distribution des TOI associées aux CMB et celles des dérives estimées par l'algorithme de destriage. Les valeurs des éléments des TOI sont distribuées suivant une gaussienne. La variance associée à la dérive correspond à environ 1% de la variance du signal du CMB. On s'attend donc à ce que l'altération du spectre de

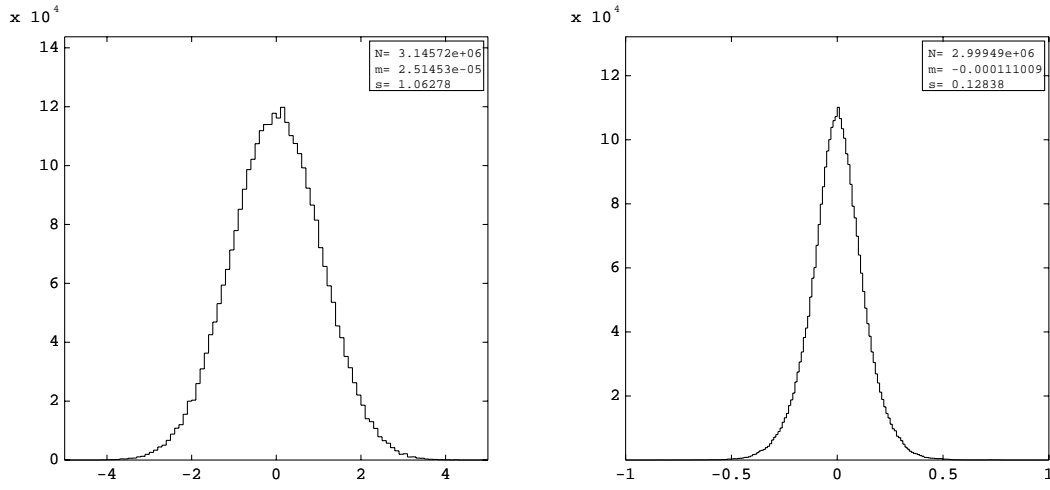


FIG. 4.21 – La figure de gauche montre la distribution des TOI associées aux CMB en μK . La figure de droite montre la distribution des dérives estimées par l'algorithme de destriage.

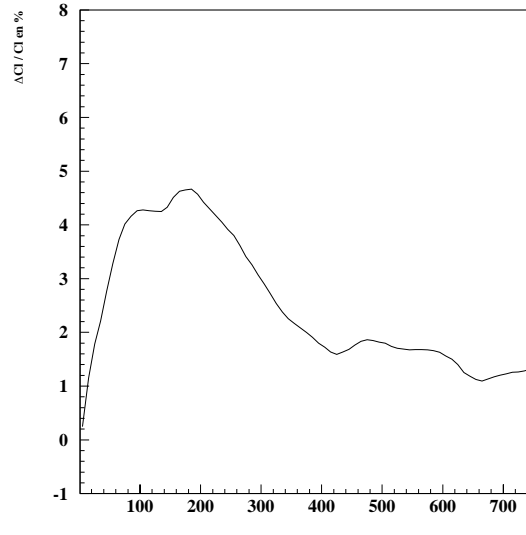


FIG. 4.22 – On compare le spectre de puissance extrait de la carte ‘destriée’ avec celui de la carte initiale. La figure montre la variation relative du spectre induite par l'algorithme de destriage.

puissance du CMB induite par l'algorithme de destriage soit également de l'ordre du pourcent. La comparaison du spectre de puissance de la carte initiale avec celui de la carte destriée est effectuée numériquement figure 4.22. On constate que l'altération induite par l'algorithme sur le spectre de puissance est inférieure à 4%.

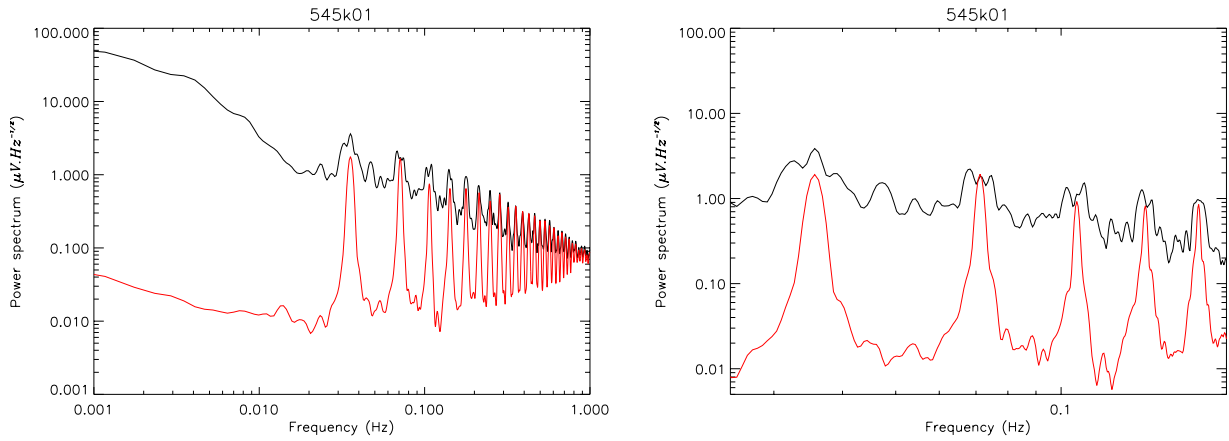


FIG. 4.23 – La figure de gauche montre le spectre des données du bolomètre à 545 GHz avant destriage (en noir) et après destriage (en rouge). La figure de droite montre un agrandissement du spectre. Le destriage réduit le niveau de bruit aux basses fréquences. Le bruit quasi-synchrone avec la rotation est également atténué.

4.2.5 Application aux données d'Archeops

Dans le cadre d'Archeops, nous avons appliqué les deux algorithmes, minimisation de variance par pixel et minimisation de la variance transverse, sur toutes les voies. La figure 4.23 montre le spectre de puissance des données avant et après destriage. On peut noter sur cette figure que, dans les données initiales, les pics situés aux harmoniques de la fréquence de rotation sont assez larges. On vérifie qu'ils sont en fait plus larges que la forme attendue des pics associés au spectre du signal galactique. Cela montre qu'il existe une forte composante de bruit quasi-synchrone avec la rotation. On avait déjà noté cette caractéristique dans la section 4.2.2 lors de l'étude préliminaire. La signature spectrale de cette composante de bruit, très présente dans la voie à 545 GHz et dans une moindre mesure dans celles à 343 GHz, indique qu'il s'agit du signal d'atmosphère.

L'observation du spectre des données destriées montre que le destriage réduit non seulement le niveau de bruit à basse fréquence mais retire également une partie de la composante atmosphérique. Les données sont alors suffisamment destriées pour produire des cartes par simple co-addition. La figure 4.24 montre la carte à 545 GHz obtenue en appliquant successivement les destriages par minimisation des variances par pixel et transverses. On observe que, si les stries ont disparu, il existe des inhomogénéités à grande échelle sur la carte. Ces inhomogénéités sont associées à des motifs dipolaires, caractéristiques des composantes synchrones avec la rotation. Elles montrent que des composantes de bruit synchrones avec la rotation sont encore présentes dans les données.

Si les algorithmes développés parviennent à réduire drastiquement les dérives, on a vu qu'ils sont moins efficaces contre le bruit synchrone avec la rotation. Au sein de la collaboration, J.F. Macías-Pérez [10] a développé un algorithme spécifique à base d'ondelettes pour retirer le signal atmosphérique. Du point de vue statistique, le bruit et le signal du CMB sont des signaux aléatoires gaussiens. L'analyse en ondelettes permet de détecter et de retirer les signaux non gaussiens. Ces composantes non gaussiennes correspondent au signal galactique et au signal d'atmosphère. Or on ne s'intéresse qu'à la contribution de l'atmosphère. La composante galactique doit donc

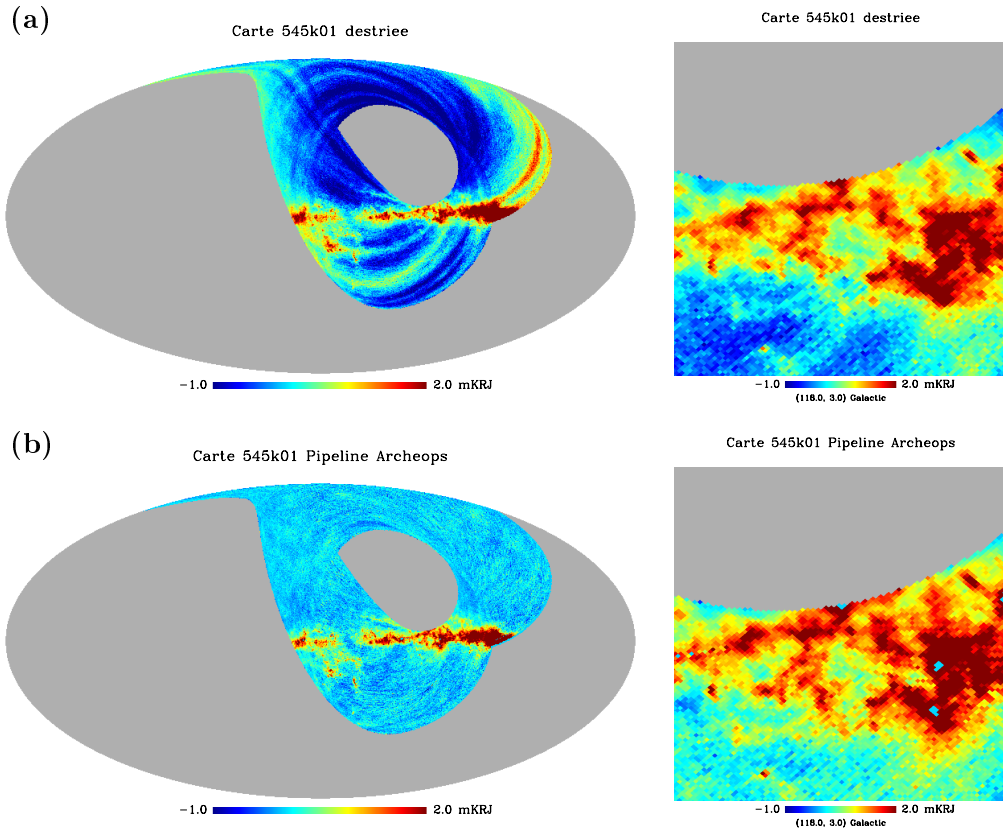


FIG. 4.24 – La carte (a) correspond à la carte obtenue après coaddition des données à 545 GHz destriées. Elle présente des inhomogénéités à grande échelle induites essentiellement par le signal atmosphérique. La carte (b) est obtenue après application d'un algorithme à base d'ondelettes permettant de retirer le signal d'atmosphère. On a effectué, à droite, un agrandissement pour ces deux cartes d'une région située près du plan galactique.

être préalablement extraite des données. Pour cela, les portions de données associées à la zone galactique sont remplacées par une réalisation du bruit. Cette opération est facilitée du fait de la bonne estimation de la ligne de base produite par le destriage. L'algorithme à base d'ondelettes est alors appliqué. La figure 4.24 montre la carte à 545 GHz obtenue après extraction du signal atmosphérique. On constate que les inhomogénéités à grande échelle ont disparu. On observe sur les agrandissements, situés figure 4.24, que les structures galactiques à petites échelles sont bien visibles, même lorsque les inhomogénéités dues à l'atmosphère sont présentes.

4.3 Destriage par ondelettes

Les destriages que nous avons développés s'appuient sur des fonctions permettant de faciliter l'implémentation algorithmique. Il existe cependant des bases de fonctions qui possèdent des propriétés particulières vis-à-vis du bruit de type $1/f$: ce sont les ondelettes. Aussi, nous avons développé un nouvel algorithme de destriage basé sur l'utilisation des propriétés spécifiques des ondelettes. Après avoir présenté brièvement les propriétés des ondelettes, nous détaillerons ce nouvel algorithme de destriage.

4.3.1 Propriétés des ondelettes

Une ondelette est une fonction ψ utilisée pour former une base dans l'espace des fonctions de carrés sommables $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. La base d'ondelettes est générée à partir de transformations correspondant aux dilatations et aux translations de la fonction ψ . Pour être utilisée comme ondelette, la fonction ψ doit satisfaire à deux conditions :

- être localisée autour de 0, c'est à dire décroître rapidement quand $x \rightarrow \infty$
- osciller, ce qui se traduit par $\int \psi(x)dx = 0$.

La transformée en ondelettes d'une fonction f de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ peut être définie comme :

$$Wf(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dx, \quad (4.45)$$

λ et t sont respectivement les paramètres d'échelle et de position associés aux dilatations et aux translations qui génèrent la base d'ondelettes à partir de ψ . La transformation inverse est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty Wf(\lambda, t) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad (4.46)$$

où C_ψ est une constante de normalisation. Si le développement en ondelettes n'est connu que pour les échelles $\lambda < \lambda_0$, il faut pour reconstruire f une information complémentaire portant sur les échelles $\lambda > \lambda_0$. Cette information est encodée à l'aide d'une fonction ϕ , appelée fonction d'échelle.

Une analyse en ondelettes consiste à décomposer le signal sur une gamme très étendue d'échelles $\{\lambda\}$. Pour construire une base orthonormale de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on introduit les fonctions définies par :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad (4.47)$$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \quad (4.48)$$

où j et k sont des entiers relatifs. On montre que l'ensemble $\{\phi_{j,k}, \psi_{j,k}\}$ forme une base orthonormée. Le développement de f sur cette base de fonctions s'écrit sous différentes formes :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (4.49)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \quad (4.50)$$

$$= A_{j_0} f + \sum_{j=j_0}^{\infty} D_j f \quad (4.51)$$

Le terme $A_{j_0} f$ correspond à l'approximation de f à l'échelle j_0 . En allant des échelles les plus grossières (j faible) vers les échelles les plus fines (j élevé), on accède à des représentations de plus en plus précises du signal donné. Le terme $D_j f$ représente les détails correspondant à la différence entre les approximations de f aux résolutions $j+1$ et j :

$$D_j f = A_{j+1} f - A_j f \quad (4.52)$$

Les ondelettes permettent donc de représenter les détails gagnés lors du passage d'une résolution à la résolution plus fine suivante.

Le calcul de la transformée en ondelettes d'une fonction f échantillonnée par $N = 2^J$ points est appelé transformée en ondelettes discrète (WDT pour Wavelet Discret Transform). La transformée en ondelettes discrète étant une opération linéaire, elle peut s'écrire sous forme matricielle (tout comme la transformée de Fourier discrète) :

$$\tilde{f} = Wf \quad (4.53)$$

La matrice W est orthogonale. La transformation inverse s'obtient donc à partir de W^T , la transposée de W . Cependant, le calcul de la transformée en ondelettes s'effectue pratiquement avec un algorithme qui requière seulement N opérations. Le calcul de la transformée en ondelettes est donc plus rapide que le calcul d'une FFT.

4.3.2 Ondelettes et bruit 1/f

Classiquement, les processus de type 1/f regroupent les signaux dont la densité spectrale S suit une loi de puissance de la forme :

$$\lim_{f \rightarrow 0} S \sim \frac{\sigma_a^2}{\omega^\gamma} \quad (4.54)$$

où l'indice spectral γ est en général compris entre 0 et 2.

L'analyse en ondelettes est particulièrement bien adaptée pour l'étude de ces processus. On montre notamment que la corrélation des coefficients $d_{j,k}$ de la WDT d'un bruit de type 1/f suit une loi du type [15] :

$$\langle d_{j,k}, d_{j',k'} \rangle = \frac{2^{-(j+j')/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_a^2}{|\omega|^\gamma} \psi(2^{-j}\omega) \psi^*(2^{-j'}\omega) e^{i(2^j k - 2^{j'} k')\omega} d\omega. \quad (4.55)$$

Cette relation implique notamment que la variance des coefficients du développement en ondelettes d'un processus 1/f varie en fonction de la résolution comme [15] :

$$Var(d_{j,k}) = \sigma^2 2^{-\gamma j} \quad (4.56)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_a^2}{|\omega|^\gamma} |\psi(2^{-j}\omega)|^2 d\omega. \quad (4.57)$$

De plus, la corrélation entre les coefficients du développement en ondelettes, définie comme :

$$\rho_{j,j'}^{k,k'} = \frac{\langle d_{j,k}, d_{j',k'} \rangle}{Var(d_{j,k}) Var(d_{j',k'})} \quad (4.58)$$

décroît comme :

$$\langle d_{j,k}, d_{j',k'} \rangle \sim |2^j k - 2^{j'} k'|^{\gamma-2R} \quad \text{pour } |2^j k - 2^{j'} k'| \rightarrow \infty \quad (4.59)$$

Le paramètre R correspond au nombre de moments nuls¹⁸. Ce résultat implique que la matrice de corrélation est quasi-diagonale. La transformation qui diagonalise la matrice de corrélation d'un processus aléatoire est appelée transformation de Karhunen-Loève. Comme la transformée en ondelettes diagonalise la matrice de corrélation des bruits 1/f, elle correspond à la transformation Karhunen-Loève pour ce type de bruit.

¹⁸Une ondelette ψ possède R moments nuls si

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k < R \quad (4.60)$$

4.3.3 Destriage avec ondelettes par maximum de vraisemblance

La propriété remarquable des ondelettes vis-à-vis des processus 1/f nous a poussé à développer un algorithme de destriage à base d'ondelettes. On suppose que le signal délivré par un bolomètre peut s'écrire sous la forme :

$$b(t) = s(t) + n(t) = s(t) + n_c(t) + w(t) \quad (4.61)$$

où les différentes composantes du bruit ont été explicitées. Le terme $s(t)$ désigne la contribution du ciel, $w(t)$ le bruit blanc et $n_c(t)$ le bruit en 1/f. Le bruit blanc possède une matrice de covariance C_w diagonale. Le bruit 1/f présente par contre des corrélations à grande distance. La matrice de covariance correspondante n'est donc pas diagonale.

On cherche à caractériser $n_c(t)$ par son développement en ondelettes \tilde{n}_c . On a vu que les coefficients du développement en ondelettes d'un bruit en 1/f suivent une loi gaussienne et que d'autre part la matrice de covariance associée est diagonale. C'est cette propriété qui justifie le choix d'utiliser les ondelettes pour décrire les dérives basse fréquence. En notant \tilde{n}_c les coefficients du développement en ondelettes du bruit en 1/f, On a :

$$\mathbf{n}_c = W^T \tilde{\mathbf{n}}_c \quad (4.62)$$

où W^T est la matrice représentant la transformation en ondelettes inverse. On rappelle que si la transformation en ondelettes peut s'écrire sous forme matricielle, dans la pratique on utilise un algorithme spécifique en $\mathcal{O}(n)$ et non en $\mathcal{O}(n^2)$ comme le laisse supposer la notation matricielle.

Pour déterminer les coefficients \tilde{n}_c , on fait l'hypothèse que les bruits blanc \mathbf{w} et corrélé $\tilde{\mathbf{n}}_c$ suivent une loi gaussienne et sont indépendants. La matrice de covariance du bruit s'écrit alors :

$$N = \langle \mathbf{n} \mathbf{n}^T \rangle = \langle (\mathbf{w} + \mathbf{n}_c)(\mathbf{w} + \mathbf{n}_c)^T \rangle \quad (4.63)$$

$$= \langle \mathbf{w} \mathbf{w}^T \rangle + \langle \mathbf{n}_c \mathbf{n}_c^T \rangle \quad (4.64)$$

Les matrices de covariance C_w et $C_{\tilde{n}_c}$ définies par :

$$C_w = \langle \mathbf{w} \mathbf{w}^T \rangle \quad (4.65)$$

$$C_{\tilde{n}_c} = \langle \tilde{\mathbf{n}}_c \tilde{\mathbf{n}}_c^T \rangle \quad (4.66)$$

sont diagonales. La fonction de vraisemblance s'écrit alors dans ce cas :

$$\mathcal{L} = P(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = P(\mathbf{w}|\mathbf{m})P(\tilde{\mathbf{n}}_c|\mathbf{m}) \quad (4.67)$$

$$\sim \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{w}^T C_w^{-1} \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{n}}_c^T C_{\tilde{n}_c}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_c) \right] \quad (4.68)$$

La minimisation de la fonction de vraisemblance revient alors à minimiser le chi-2 suivant [8] :

$$\chi^2 = \mathbf{w}^T C_w^{-1} \mathbf{w} + \tilde{\mathbf{n}}_c^T C_{\tilde{n}_c}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_c \quad (4.69)$$

$$= (\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c - \mathbf{s})^T C_w^{-1} (\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c - \mathbf{s}) + \tilde{\mathbf{n}}_c^T C_{\tilde{n}_c}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_c \quad (4.70)$$

Pour simplifier l'écriture posons :

- $\mathbf{s} = \mathcal{D} \mathbf{m}$
- $\mathcal{D} = P$
- $\mathcal{P} = (PP)^{-1} P^T$

Les grandeurs \mathcal{P} et \mathcal{D} correspondent respectivement aux opérateurs de coaddition (passage d'une carte aux TOI) et de déprojection (lecture d'une carte pour former des TOI). L'équation 4.70 s'écrit alors :

$$\chi^2 = (\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c - \mathcal{D}\mathbf{m})^T C_w^{-1} (\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c - \mathcal{D}\mathbf{m}) + \tilde{\mathbf{n}}_c^T C_{\tilde{\mathbf{n}}_c}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_c \quad (4.71)$$

En minimisant successivement par rapport à \mathbf{m} , puis à $\tilde{\mathbf{n}}_c$, on trouve :

$$\mathbf{m} = \mathcal{P}(\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c) \quad (4.72)$$

$$0 = -WC_w^{-1}(I - \mathcal{D}\mathcal{P})(\mathbf{b} - W^T \tilde{\mathbf{n}}_c) + C_{\tilde{\mathbf{n}}_c}^{-1} \tilde{\mathbf{n}}_c \quad (4.73)$$

soit :

$$(WC_w^{-1}(I - \mathcal{D}\mathcal{P})W^T + C_{\tilde{\mathbf{n}}_c}^{-1})\tilde{\mathbf{n}}_c = WC_w^{-1}(I - \mathcal{D}\mathcal{P})\mathbf{b} \quad (4.74)$$

La résolution du système 4.74 peut être effectuée en utilisant une méthode itérative. La matrice du système étant symétrique et définie positive, on utilise la méthode du gradient conjugué [11]. Les matrices de covariances $C_{\tilde{\mathbf{n}}_c}$ et C_w qui interviennent dans 4.74 sont diagonales. La résolution itérative n'implique donc pas l'utilisation explicite de matrices. Il reste cependant à spécifier les valeurs des matrices de covariance (en fait des valeurs diagonales)...

4.3.4 Mise en œuvre

Dans les termes intervenant dans l'équation 4.74, la matrice de covariance des coefficients $\tilde{\mathbf{n}}_c$ du développement en ondelettes du bruit en 1/f reste à déterminer. Or, on sait que cette matrice est diagonale (les éléments non diagonaux décroissent très vite ...) [14] [7].

Le développement en ondelettes du signal d'un bolomètre s'écrit :

$$b^j_k = w^j_k + n^j_{ck} + s^j_k \quad (4.75)$$

où les symboles tildes, indiquant qu'il s'agit de coefficients du développement en ondelettes, ont été omis pour alléger l'écriture. L'indice j est l'indice de résolution et k l'indice temporel.

Si les données sont dominées par le bruit, on peut négliger la contribution du signal. Le développement en ondelettes de $b(t)$ est alors donné par

$$b^j_k = w^j_k + n^j_k \quad (4.76)$$

Les bruits $w(t)$ et $n_c(t)$ étant supposés gaussiens, la variance des coefficients de $b(t)$ est donnée par [14] :

$$\sigma_{b^j_k}^2 = \sigma_{j,k}^2 = \sigma^2 2^{-j\gamma} + \sigma_w^2 \quad (4.77)$$

La variance du bruit blanc est la même quelque soit la résolution j . Les paramètres à estimer sont donc γ , σ^2 et σ_w^2 . Cette estimation peut s'effectuer à l'aide d'un algorithme type Monte Carlo Markov Chains (MCMC). Le principe de fonctionnement des MCMC sera donné au chapitre suivant. Il repose sur l'utilisation de la fonction de vraisemblance associée à ces paramètres. Cette dernière correspond à [14] :

$$L(\gamma, \sigma^2, \sigma_w^2) = \prod_{j,k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(b^j_k)^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad (4.78)$$

où on a posé $\sigma_j^2 = \sigma^2 2^{-j\gamma} + \sigma_w^2$. On a en particulier, en posant $N_j = \frac{N}{2^j}$:

$$\log(L(\gamma, \sigma^2, \sigma_w^2)) = -\frac{1}{2} \sum_m N_j \left(\frac{\hat{\sigma}_j^2}{\sigma_j^2} + \log(2\pi\sigma_j^2) \right) \quad (4.79)$$

avec $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N_j} \sum_k b_k^j{}^2$. La détermination des paramètres γ , σ^2 et σ_w^2 permet alors de caractériser la matrice de covariance $C_{\tilde{n}_c}$, donc la résolution de l'équation 4.74.

Cependant, dans le cas d'Archeops, si le signal du CMB est dominé par le bruit, le signal galactique est dominant dans la zone du plan galactique. Dans le développement en ondelettes, le signal galactique se manifeste par une variance importante des coefficients d'ondelettes des données. On ne peut donc pas négliger la contribution du signal galactique dans l'équation 4.75.

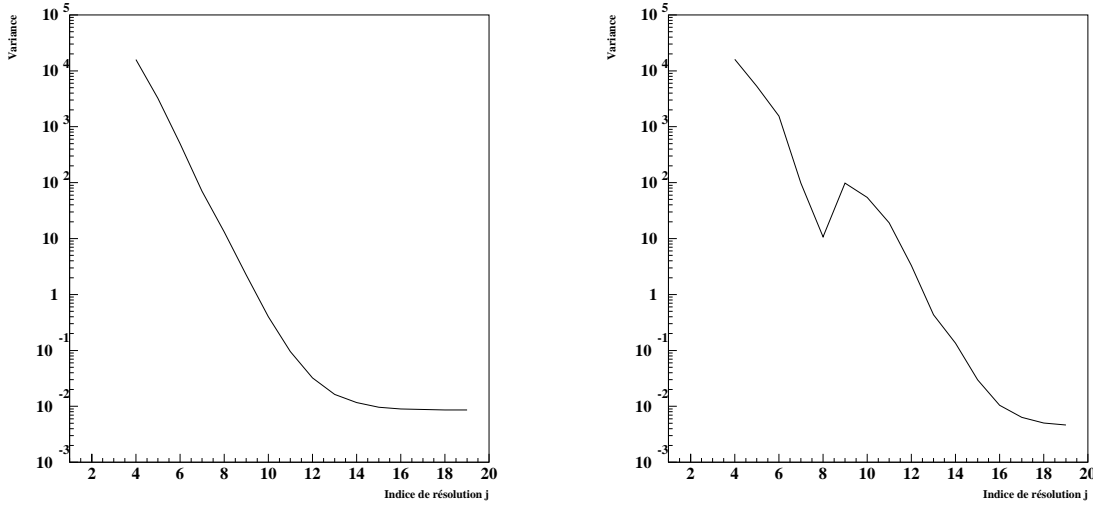


FIG. 4.25 – La figure de gauche montre l'évolution de la variance des coefficients du développement en ondelettes d'un bruit de type 1/f en fonction de l'indice de résolution. On observe que la variance suit bien une loi de type 4.77. La figure de droite montre l'évolution de la variance des coefficients d'ondelettes du bolomètre 545k01 d'Archeops. On observe nettement la contribution du signal galactique.

La variance des coefficients de $b(t)$ s'écrit alors :

$$\sigma_{b,j}^2 = \sigma_{w,j}^2 + \sigma_{n_c,j}^2 + \sigma_{gal,j}^2 \quad (4.80)$$

où l'indice j spécifie la résolution. Parmi les termes de l'équation 4.80, deux s'obtiennent directement, $\sigma_{b,j}$ et $\sigma_{w,j}$. En effet, la variance $\sigma_{b,j}$ se calcule directement via la transformée en ondelettes de $b(t)$, et $\sigma_{w,j}$ ne dépend que du niveau de bruit blanc. Ainsi pour déterminer le niveau de variance des dérivées, $\sigma_{n_c,j}^2$, il reste à spécifier la contribution galactique $\sigma_{gal,j}$. Pour cela, on utilise une carte de Galaxie de type SFD. La transformée en ondelettes des TOI correspondantes permet d'estimer la contribution galactique $\sigma_{gal,j}$ à la variance des données. On en déduit alors la variance des coefficients associés au bruit en 1/f à chaque résolution j :

$$\sigma_{n_c,j}^2 = \sigma_{b,j}^2 - \sigma_{gal,j}^2 - \sigma_{w,j}^2 \quad (4.81)$$

On détermine de cette façon les éléments diagonaux de la matrice $C_{\tilde{n}_c}$. On peut alors résoudre l'équation 4.74, avec les hypothèses suivantes :

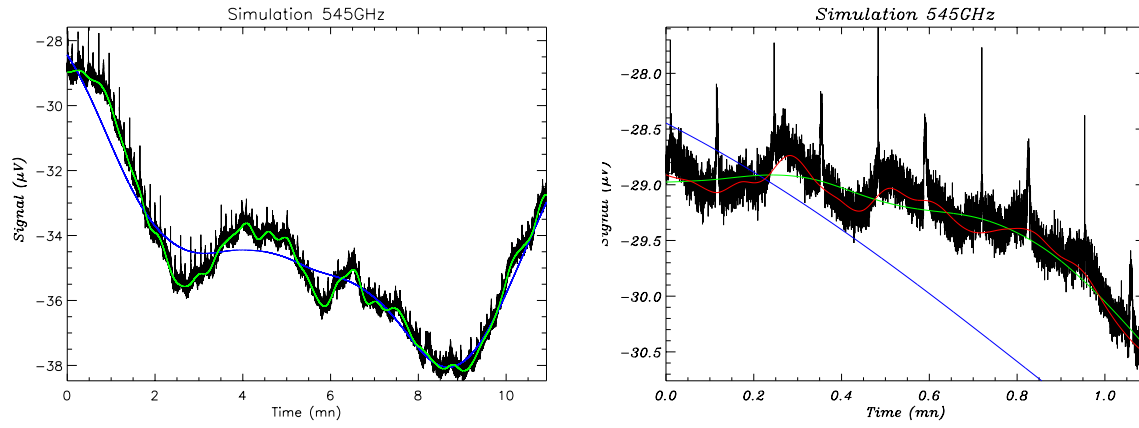


FIG. 4.26 – Améliorations successives de l'estimation des dérives. On effectue un développement en ondelettes partiel pour obtenir une estimation de la ligne de base (en bleu). A l'aide de l'algorithme 4.74, on détermine successivement les coefficients du développement en ondelettes caractérisant les dérives pour les résolutions plus fines (en vert et en rouge).

- La matrice de covariance des coefficients du développement en ondelettes des dérives est diagonale.
- Les éléments diagonaux sont déterminés par l'intermédiaire de la relation 4.81 et de l'utilisation d'un modèle de Galaxie indiquant la variance σ_{gal}^2 pour une résolution j donnée.

4.3.5 Efficacité du destriage en ondelettes

Nous utilisons des TOI de 3×2^{21} échantillons correspondant à la somme d'un bruit en $1/f$, d'un bruit blanc et d'une carte SFD lue avec le pointage KS3 d'Archeops. On utilise le jeu de données simulées décrit dans la section 4.2.4. La mise en œuvre de l'algorithme 4.74, s'effectue de la façon suivante :

- On estime une première ligne de base en utilisant le développement en ondelettes des TOI initiales.
- On améliore l'estimation des dérives en calculant leurs coefficients du développement en ondelettes en résolvant la système 4.74 successivement à des échelles de plus en plus petites (voir figure 4.26).

Une fois que l'estimation de la dérive est obtenue, on retranche celle-ci aux TOI initiales. La carte correspondante est alors produite par simple coaddition. La figure 4.27 montre la carte destriée et la carte d'erreur. La carte d'erreur est produite en effectuant la différence entre la carte coadditionnée et la carte de Galaxie utilisée pour la simulation. On observe des différences à grandes échelles angulaires entre les deux cartes. La comparaison des figures 4.19 et 4.27 montre que les résidus sont plus importants avec le destriage par ondelettes. L'observation du spectre de la différence entre les dérives utilisées pour la simulation et celles obtenues confirme que le destriage est moins efficace que le destriage par minimisation de variances. Les pics situés aux harmoniques de la fréquence de rotation sont plus importants avec le destriage par ondelettes.

La présence d'harmoniques de fortes amplitudes indique que la Galaxie induit un biais dans la détermination de la dérive. La première étape de l'algorithme de destriage consiste à extraire

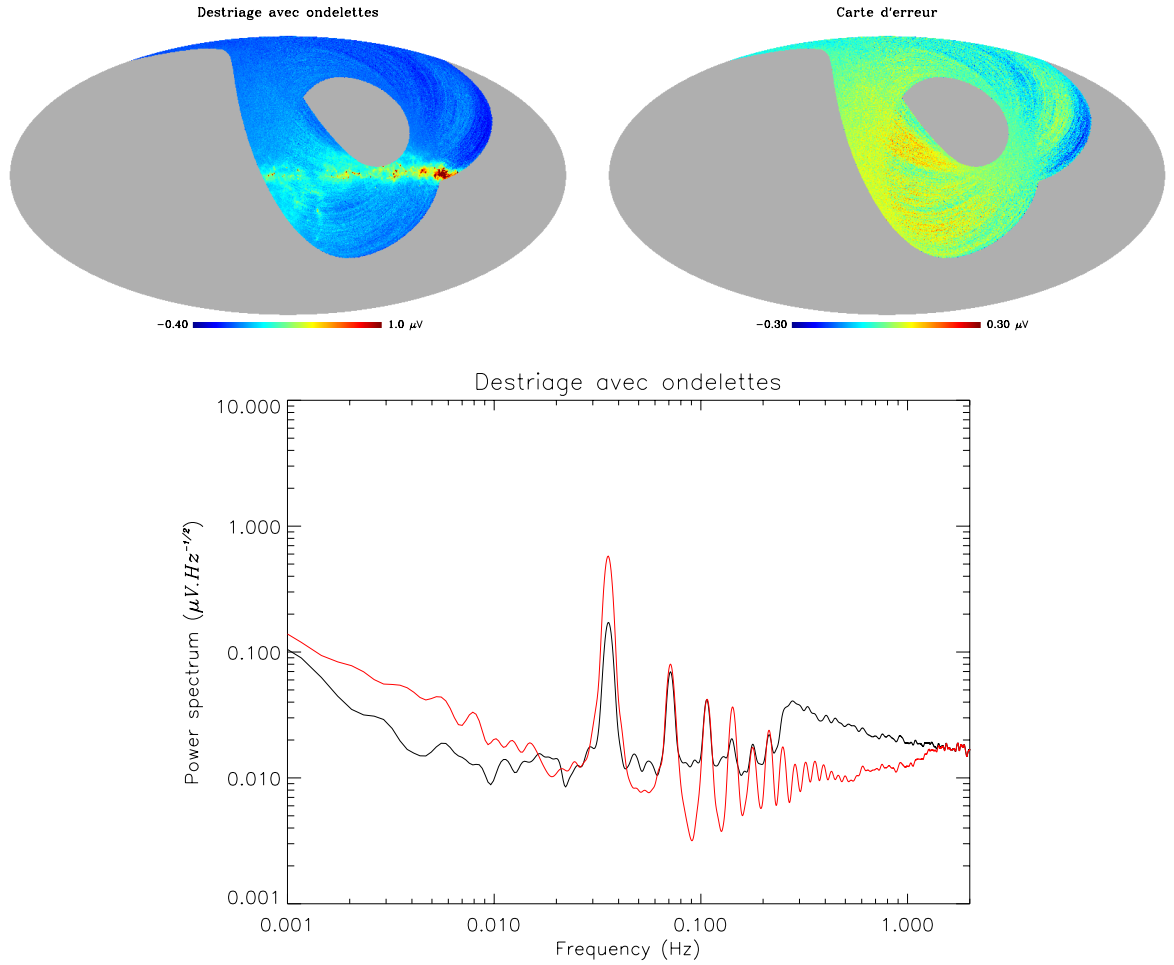


FIG. 4.27 – Cartes obtenues avec le destriage par ondelettes sur la simulation de la voie à 545 GHz. La carte de droite correspond à la carte coadditionnée. La carte de gauche a été obtenue en effectuant la différence entre la carte coadditionnée et la carte de la Galaxie utilisée pour générer la simulation. On compare le spectre de puissance des TOI destriées avec ondelettes (en rouge) avec celui des TOI obtenues après destriage par minimisation de variances (en noir). Il reste une importante composante synchrone avec la rotation. Cette dernière induit un motif dipolaire sur la carte d'erreur.

la ligne de base par décomposition partielle en ondelettes. Manifestement, la présence de la Galaxie perturbe la détermination de la ligne de base. Pour réduire cet effet, nous appliquons une deuxième fois l'algorithme en modifiant notre approche. Nous procédons de la façon suivante :

- On utilise la carte obtenue par coaddition, bien qu'elle possède des anomalies à grandes échelles. Cette carte est seuillée de façon à ne garder que les composantes suffisamment intenses.
- Le signal est déprojeté et oté des données initiales. On amorce donc l'algorithme non pas avec les TOI \mathbf{b} , mais avec $\mathbf{b} - \mathcal{D}\mathbf{m}_s$, où \mathbf{m}_s correspond à la carte seuillée.
- La détermination des coefficients du développement en ondelettes des dérivées via l'équation 4.74 s'effectue de la même façon que pour l'étape précédente. La carte \mathbf{m}_s utilisée pour amorcer l'algorithme n'intervient plus.

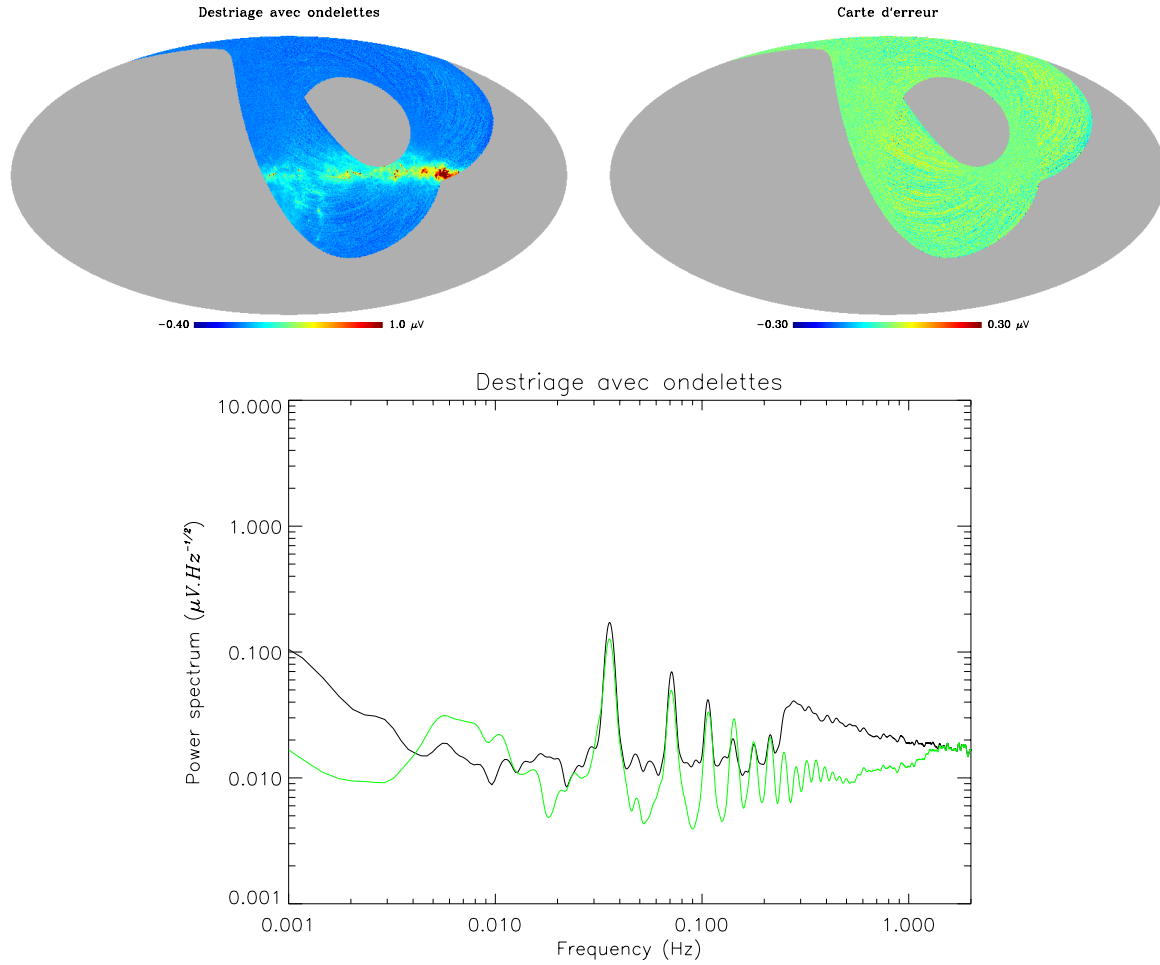


FIG. 4.28 – Cartes obtenues avec le destriage par ondelettes sur la simulation de la voie à 545 GHz. La carte de droite correspond à la carte coadditionnée. La carte de gauche a été obtenue en effectuant la différence entre la carte coadditionnée et la carte de la Galaxie utilisée pour générer la simulation. On compare le spectre de puissance des TOI destriées avec ondelettes (en vert), en effectuant deux itérations, avec celui des TOI obtenues après destriage par minimisation de variances (en noir).

On constate que, à l'issue de cette seconde itération, l'impact de la Galaxie sur l'estimation de la ligne de base est réduit. La figure 4.28 montre la carte coadditionnée et la carte d'erreur correspondante. La carte d'erreur est plus homogène. Le destriage est donc de qualité comparable à celui obtenu avec les minimisations de variances. Ceci est confirmé par l'analyse du spectre de puissance, figures 4.27 et 4.28. Ces figures montrent le spectre de la différence entre la dérive utilisée pour la simulation et la dérive obtenue avec l'algorithme. Le spectre a une amplitude à basse fréquence plus faible à l'issue de la deuxième itération. On observe également que les pics situés aux harmoniques de la fréquence de rotation sont moins prononcés.

4.3.6 Développements

L'inconvénient principal de la méthode employée réside dans l'utilisation d'un modèle de Galaxie par l'algorithme de destriage. Le modèle permet de caractériser les éléments diagonaux de

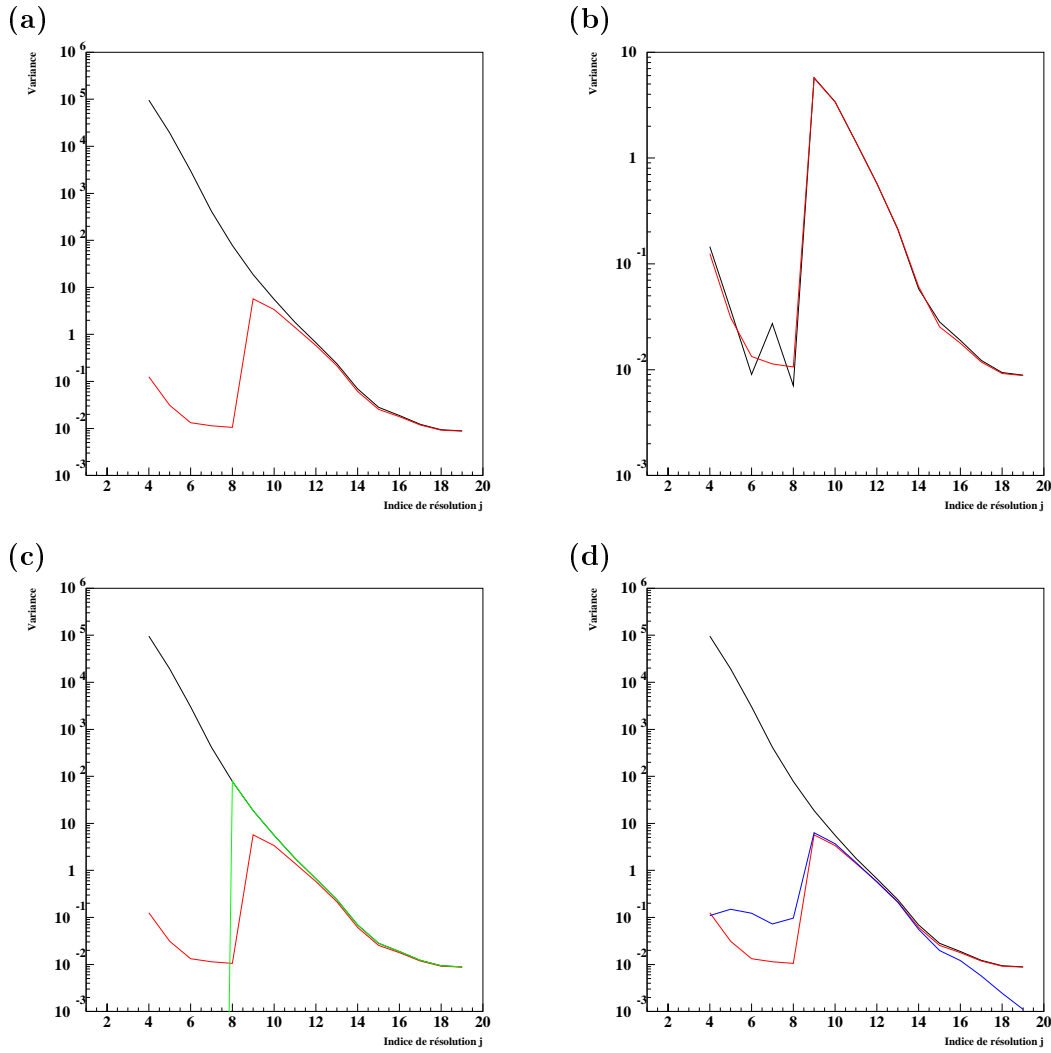


FIG. 4.29 – Les figures (a) et (b) montrent les variances des coefficients du développement en ondelettes des données simulées (en noir) et du modèle de Galaxie (en rouge). La figure (a) correspond aux données avant destriage et la figure (b) aux données après destriage. Les figures (c) et (d) illustrent la façon dont on peut retrouver la variance des coefficients associés à la Galaxie à partir des données. Sur la figure (c), la courbe verte montre la variance des coefficients associés aux données après filtrage dans l'espace de Fourier. La courbe bleue de la figure (d) montre la variance de ces coefficients après coaddition et relecture des données. On parvient alors à estimer le niveau de variance correspondant au modèle galactique.

la matrice de covariance via l'équation 4.80, ce qui représente en pratique une dizaine de coefficients. Pour rendre l'algorithme autonome, il faudrait que l'on puisse déterminer ces paramètres sans avoir à utiliser de modèle de Galaxie. Le comportement à haute fréquence, c'est à dire à haute résolution, est dominé par le signal galactique. Les variances correspondantes peuvent donc être estimées directement à partir de la TOI. Les variances relatives au comportement à plus basse résolution peut s'estimer de la façon suivante :

- On applique un filtre passe haut sur les TOI à destrier.
- On fabrique une carte coadditionnée à partir des TOI filtrées.

- Cette carte est utilisée comme estimateur de la Galaxie. Les TOI formées à partir de cette carte sont utilisées pour calculer les variances.

Les variances obtenues de cette façon sont représentées figure 4.29. On observe que l'on est capable de retrouver la plupart des variances associées au modèle de Galaxie directement à partir des TOI.

4.3.7 Application aux données d'Archeops

Regardons maintenant comment appliquer l'algorithme de destriage par ondelettes aux données d'Archeops. Nous considérons en particulier les bolomètres à 217 et 545 GHz. Lors des simulations, nous avons considéré que les données d'un bolomètre correspondaient à la somme de trois composantes :

$$\text{données} = \text{signal galactique} + \text{buit blanc} + \text{bruit } 1/f$$

Pour les données d'Archeops, il faut en plus considérer les points suivants :

- La voie à 217 GHz est sensible au signal du CMB. Le signal du CMB est dominé par le bruit blanc dans les données. Il a de plus les mêmes propriétés qu'un bruit gaussien, sans corrélation à grande échelle. De ce point de vue, il est intégré à la composante de bruit blanc.
- La voie à 545 GHz est sensible au signal atmosphérique. C'est un signal de nature non gaussienne, comme le signal galactique. On a vu que les effets d'atmosphère renforçaient les dérives basses fréquences. Toutefois, la contribution atmosphérique n'est pas bien décrite par les coefficients en ondelettes \tilde{n}_c . En effet, l'algorithme de destriage suppose que la matrice de corrélation des coefficients du développement en ondelettes des dérives soit diagonale, ce qui n'est le cas que si le bruit associé aux dérives est de nature gaussienne.

La composante atmosphérique risque donc de perturber le destriage. L'application de l'algorithme de 4.74 sur les données relatives à la voie à 545 GHz conduit aux cartes de la figure 4.30. Les cartes produites de cette façon ne sont pas de très bonne qualité. En comparant les variances des coefficients d'ondelettes des TOI destriées avec les variances associées au modèle de Galaxie, on observe, figure 4.31, un excès de puissance dans les données. Cet excès est dû à la présence de la composante atmosphérique.

Initialisation avec débruitage par seuil

Pour améliorer l'efficacité du destriage, nous avons cherché à amorcer l'algorithme de manière un peu différente. L'idée est d'utiliser une méthode permettant de réduire l'impact de la composante atmosphérique. Cette méthode est basée sur l'utilisation du débruitage par seuil ou wavelet shrinkage denoising. La technique du débruitage par seuil a été utilisée par J.F. Macías-Pérez pour extraire la composante atmosphérique des données Archeops destriées.

L'idée ici est d'intégrer cette technique au destriage lui-même afin de réduire les effets du signal d'atmosphère. Pour illustrer le principe du débruitage par seuil, nous considérons des données d correspondant à :

$$d(t) = s(t) + n(t), \tag{4.82}$$

où s et n représentent respectivement le signal et le bruit. Le débruitage par seuil permet de construire une estimation s_e du signal s à partir de d . Cette estimation s'effectue en trois étapes :

- Calcul de la transformée en ondelettes des données : $\tilde{d} = Wd$.

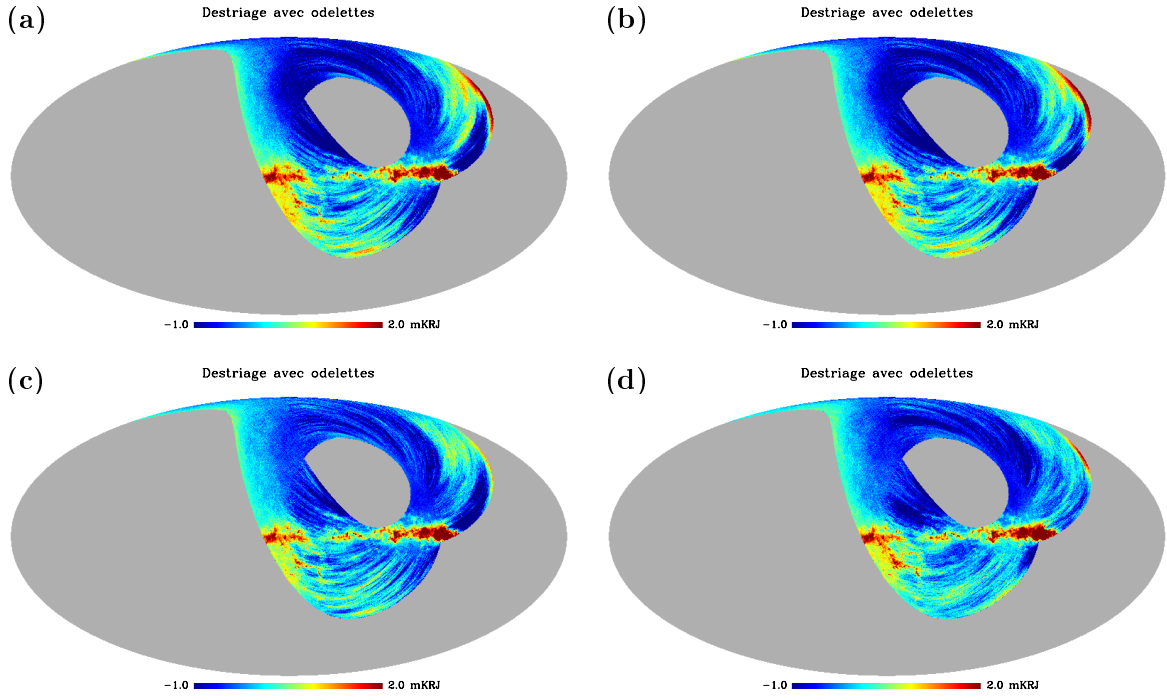


FIG. 4.30 – Les cartes ont été produites par coaddition après application du destriage à base d'ondelettes. Les cartes (c) et (d) ont été obtenues en utilisant en plus le débruitage par seuil. Les cartes (a) et (c) sont obtenues à l'issue de la première itération et les cartes (b) et (d) à l'issue de la seconde itération.

- Application de l'opérateur de débruitage $\mathcal{D}_\lambda : \tilde{s}_e = \mathcal{D}_\lambda \tilde{d}$.
- Application de la transformée en ondelettes inverse pour générer l'estimateur du signal atmosphérique : $s_e = W^T \tilde{s}_e$.

L'opérateur de débruitage est défini de la façon suivante [9] :

$$\mathcal{D}_\lambda \tilde{d} = \begin{cases} \tilde{d} - \text{signe}(\tilde{d})\lambda & \text{si } |\tilde{d}| - \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.83)$$

La fonction $\text{signe}(x)$ renvoie le signe de x . La valeur λ représente le niveau de bruit. Le choix de la valeur de λ constitue le point délicat de la méthode.

Dans le cadre du destriage par ondelettes, on souhaite utiliser cet estimateur lors de la phase d'initialisation de l'algorithme pour réduire les effets liés à la présence du signal d'atmosphère. Dans cette optique, le signal que l'on cherche à estimer est le signal d'atmosphère. Le seuil λ est déterminé avec un modèle de Galaxie et de bruit blanc. Les excès de signal sont alors attribués à la composante atmosphérique. En pratique, λ est déterminé de sorte que $\lambda = n\sigma_j$, où σ_j correspond à la somme des variances du modèle de Galaxie et du bruit blanc. Le nombre n est ajusté pour optimiser l'algorithme et est de l'ordre de $\sqrt{2\log N} \simeq 3 - 4$ [9].

La figure 4.31 montre que l'initialisation avec débruitage permet de réduire l'excès de puissance dû à l'atmosphère. Les cartes produites avec cette procédure sont montrées figure 4.30. On constate une amélioration sensible de la qualité des cartes.

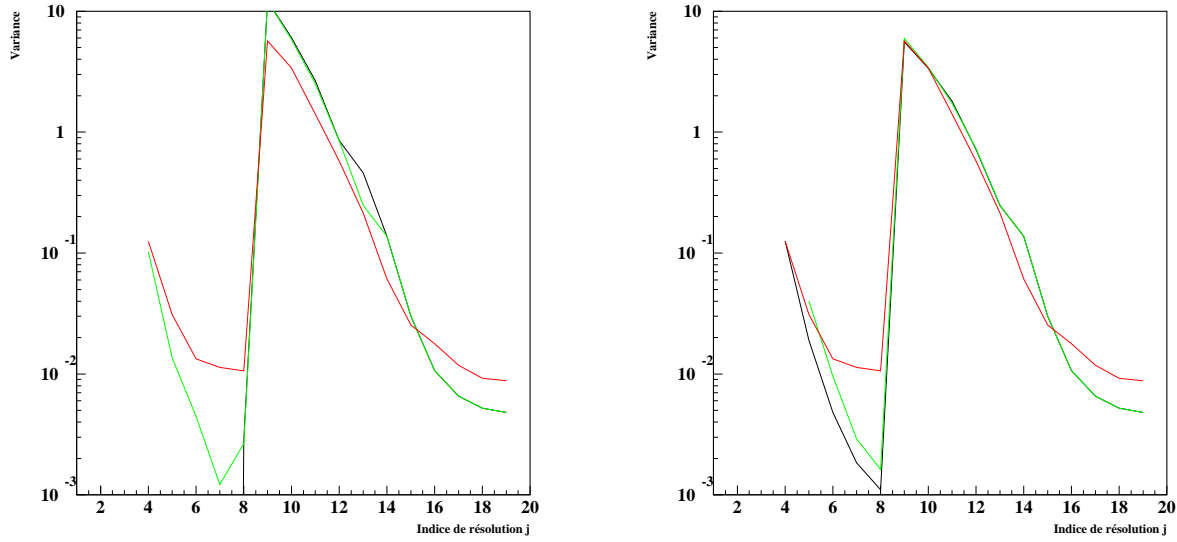


FIG. 4.31 – *Variances des coefficients du développement en ondelettes. La courbe rouge correspond au modèle de Galaxie utilisé, la courbe noire aux TOI destriées après la première itération, et la courbe verte correspond à la deuxième itération. L'utilisation du débruitage par seuil permet de ramener les variances au niveau attendu par le modèle de Galaxie.*

4.3.8 Ondelettes et destriages par minimisation de variances

Dans cette section, on discute de la possibilité de choisir les ondelettes comme base de fonction pour les algorithmes de minimisation de variance par pixel et de minimisation de variance transverse.

La minimisation de la variance par pixel de la carte coadditionnée :

$$\mathcal{M} = \sum_{\text{pixel } p} \frac{1}{\sigma_p^2 N_p - 1} \sum_{\{i_p\} \in p} (b'_{i_p} - \bar{b}'_p)^2 \quad (4.84)$$

par rapport aux coefficients du développement en ondelettes des dérivées d , $d = W\tilde{d}$ ou $d_i = \sum_k W_{ik} \tilde{d}_k$, conduit au système suivant :

$$\sum_{\text{pixel } p} \sum_{\{i_p\} \in p} (b_{i_p} - \bar{b}_p) W_{i_p l} = \sum_k \left(\sum_{\text{pixel } p} \sum_{\{i_p\} \in p} W_{i_p l} W_{i_p k} - \sum_{\text{pixel } p} \frac{1}{N_p} \sum_{\{i_p\} \in p} \sum_{\{j_p\} \in p} W_{i_p l} W_{j_p k} \right) \tilde{d}_k \quad (4.85)$$

Ce système peut se réécrire sous la forme :

$$W(I - \mathcal{DP})\mathbf{b} = (I - \mathcal{M})\tilde{\mathbf{d}} \quad (4.86)$$

On a posé :

$$\mathcal{M}_{kl} = \sum_{pixel p} \frac{1}{N_p} F(p, l) F(p, k) \quad (4.87)$$

$$F(p, k) = \sum_{i \in p} W_{i_p k} = \sum_i W_{ik} \delta_i(p) \quad (4.88)$$

$$\delta_i(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.89)$$

$F(p, k)$ correspond à la transformée en ondelettes de la TOI formée avec le pixel p . La résolution de 4.86 peut se faire itérativement, mais nécessite l'utilisation de la matrice \mathcal{M} . Cette dernière est symétrique et ne dépend que de la stratégie balayage. Elle peut donc être calculée avant de commencer la résolution de 4.86. La nécessité d'avoir à précalculer et à stocker la matrice \mathcal{M} rend l'utilisation des bases d'ondelettes moins pratique que la base de fonctions U .

L'analyse précédente appliquée à la minimisation de la variance par pixel conduit à :

$$\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \sum_{j \in \perp} (s_j - \bar{s}_{i\perp}) W_{j\parallel} = \sum_k \left(\sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \sum_{j \in \perp} W_{j\parallel} W_{j\parallel k} - \sum_{\{i\}} \frac{1}{\sigma_{i\parallel}^2} \frac{1}{N_i} \sum_{j' \in \perp} \sum_{j \in \perp} W_{j'\parallel} W_{j\parallel k} \right) \tilde{d}_k \quad (4.90)$$

Cette équation est plus difficile à écrire sous forme compacte comme cela a été fait avec la minimisation de la variance par pixel. On peut toutefois le faire en introduisant les opérateurs appropriés. On aboutit à la même difficulté que précédemment. La manipulation du système est techniquement plus compliquée à effectuer.

4.4 Conclusion

Nous avons présenté plusieurs algorithmes originaux de destriage développés dans le cadre de l'analyse des données d'Archeops. L'algorithme utilisant la minimisation de la variance transverse repose sur une approche nouvelle du problème de destriage, bien adaptée aux stratégies de balayage en cercle comme celle d'Archeops. Ce destriage s'est montré suffisamment performant pour être intégré dans la chaîne d'analyse des données d'Archeops.

Un deuxième algorithme basé sur une approche plus classique a été mis au point. L'originalité de cet algorithme repose sur l'utilisation d'une base de fonction particulière, les ondelettes, dont les propriétés sont bien adaptées pour extraire le bruit de $1/f$ des données.

Bibliographie

- [1] A. Amblard, Thèse de Doctorat, 2002, Université Paris XI Orsay.
- [2] A. Amblard, J.C. Hamilton astro-ph/0307203, submitted to Astronomy and Astrophysics
- [3] A. Amblard, J. Delabrouille, K. Ganga, J.C Hamilton, J.C. Vanel, Archeops internal Note, Nov. 1999.
- [4] O. Dore *et al.* , submitted to AA, astro-ph/0101112
- [5] D. Finkbeiner, M. Davis and D. Schlegel ApJ, 524, 867 (1999)
- [6] [http ://www.eso.org/science/healpix/](http://www.eso.org/science/healpix/).
- [7] M.J. Fadili and E.T. Bullmore, NeuroImage 15,217-232(2002)
- [8] E. Keihänen *et al.* , submitted to A&A, astro-ph/0304411.
- [9] S. Mallat, “A wavelet tour of signal processing”, Academic Press (1999)
- [10] J.F. Macías-Pérez, in preparation.
- [11] W. Press *et al.* , *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1986
- [12] G. Smoot, astro-ph/9704193.
- [13] D. Schlegel, D. Finkbeiner and M. Davis ApJ, 525, 500 (1998)
- [14] S. Wada and N. Ito, DSP 2000 Workshop
- [15] G. W. Wornell (1993), Proceedings of the IEEE, 81 :1428-1450.

Chapitre 5

Neutrinos et CMB

Sommaire

5.1	Détermination des paramètres cosmologiques	139
5.1.1	Introduction	140
5.1.2	Statistique des estimateurs	141
5.1.3	Fonctions de vraisemblance	144
5.1.4	Critère de Fischer	149
5.1.5	Problèmes liées à l'estimation des paramètres cosmologiques	149
5.2	Utilisation des méthodes MCMC	150
5.2.1	Introduction	150
5.2.2	Méthodes MCMC	150
5.2.3	Convergence	151
5.2.4	Construction de chaînes	152
5.3	Perspectives de la mission Planck	153
5.3.1	Influence des neutrinos sur le CMB	153
5.3.2	Détermination des paramètres cosmologiques	154
5.3.3	Contraintes supplémentaires issues de l'effet de lentille	161
5.3.4	Hierarchie de masse	165
5.4	Conclusion	167

Dans cette partie nous discuterons de l'influence des neutrinos sur les anisotropies du CMB. Nous présenterons la méthode d'analyse utilisée pour contraindre les paramètres cosmologiques à partir des données CMB. Enfin, nous établirons les contraintes que les mesures effectuées avec le satellite Planck pourront poser sur la masse des neutrinos.

On se place pour effectuer ce travail dans les hypothèses les plus simples. Nous n'étudierons pas les difficultés liées à la fabrication des cartes, aux systématiques dues aux effets instrumentaux, ou à la séparation des différentes composantes du signal du ciel. L'analyse proposée est en ce sens un travail préliminaire, dont l'objectif est simplement d'établir des perspectives.

5.1 Détermination des paramètres cosmologiques

La détermination des paramètres cosmologiques est obtenue en comparant les spectres de puissance angulaire mesurés avec les spectres correspondant à un modèle d'Univers. Nous détaillons dans cette section comment s'effectue la comparaison entre théorie et résultats expérimentaux.

5.1.1 Introduction

On veut obtenir à partir des données expérimentales, représentées par le spectre de puissance angulaire mesuré \mathbf{C} , des informations sur les paramètres cosmologiques ($\theta_1, \theta_2, \dots = \boldsymbol{\theta}$). En pratique, on calcule le spectre théorique \mathbf{C}^{th} associé à un modèle $\boldsymbol{\theta}$ donné via un code de Boltzmann tel que CAMB ou CMBfast. On compare alors \mathbf{C}^{th} et \mathbf{C} . Cette comparaison s'effectue en utilisant la probabilité $p(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{C}|\mathbf{C}^{th}(\boldsymbol{\theta}))$, qui indique la probabilité d'obtenir \mathbf{C} avec un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$. Lorsque l'on considère $p(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})$ cette fois comme une fonction de $\boldsymbol{\theta}$ avec \mathbf{C} fixé, cette dernière est appelée fonction de vraisemblance \mathcal{L} .

Dans le cadre Bayésien, on cherche à déterminer la probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$ d'obtenir le jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ compte tenu des données \mathbf{C} . Or, le théorème de Bayes relie la probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$ à la fonction de vraisemblance $p(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})$:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C}) = \frac{p(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{C})} = Ap(\boldsymbol{\theta})\mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta}) \quad (5.1)$$

La probabilité a priori $p(\boldsymbol{\theta})$ contient l'information connue sur les paramètres cosmologiques. Dans le cas où on n'effectue aucun a priori, on prend une valeur constante pour $p(\boldsymbol{\theta})$. Le terme $p(\mathbf{C})$ joue le rôle de constante de normalisation de sorte que l'on ait $\int p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})d\boldsymbol{\theta} = 1$.

L'incertitude sur les paramètres s'exprime en terme d'intervalles de confiance. On définit¹⁹ l'intervalle à γ % de confiance d'un paramètre θ_i comme l'intervalle $[\theta_{iL}, \theta_{iU}]$ tel que la probabilité que θ_i soit compris dans cet intervalle soit de γ % :

$$\gamma = p(\theta_{iL} < \theta_i < \theta_{iU}) \quad (5.2)$$

Les bornes θ_{iL} et θ_{iU} sont en général choisies de sorte que $p(\theta_{iL} | \mathbf{C}) = p(\theta_{iU} | \mathbf{C})$, la probabilité $p(\theta_{iL} | \mathbf{C})$ étant définie par :

$$p(\theta_i|\mathbf{C}) = \int \dots \int p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})d\theta_1 \dots d\theta_{i-1}d\theta_{i+1} \dots \quad (5.3)$$

L'intégration qui permet d'obtenir la probabilité $p(\theta_i|\mathbf{C})$ à partir de $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$ est appelée marginalisation.

La fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})$ est donc l'outil fondamental qui relie les données expérimentales aux prédictions théoriques via les spectres de puissance angulaire. L'expression générale de la fonction de vraisemblance est obtenue en utilisant le fait que les fluctuations de température suivent une loi gaussienne :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{D}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Delta}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\Delta}\right) \quad (5.4)$$

où $\boldsymbol{\Delta}$ représente la carte du ciel. L'évaluation de la fonction de vraisemblance implique alors l'inversion de la matrice de covariance du ciel \mathbf{D} . L'inversion de la matrice de covariance doit être effectuée pour chaque évaluation de la fonction de vraisemblance. La grande taille des cartes utilisées dans les expériences actuelles rend cette inversion délicate. On donne en annexe la

¹⁹Cette définition adopte le point de vue Bayésien. Les bornes θ_L et θ_U sont fixées. La valeur de θ_i , qui n'est pas connue, est considérée comme une variable aléatoire. L'intervalle de confiance donne une information sur θ_i . Dans l'approche fréquentiste, la valeur de θ_i est inconnue, mais fixée. Ce sont les bornes θ_L et θ_U de l'intervalle de confiance qui sont variables. L'intervalle de confiance donne alors une information sur θ_L et θ_U .

méthode, issue de la référence [9], permettant à partir de 5.4 d'obtenir la matrice de corrélation des estimateurs du spectre de puissance angulaire, dans le cas où le bruit des pixels est uniforme.

La fonction de vraisemblance 5.4 est donc difficilement exploitable directement dans le cadre d'une expérience comme Planck. En pratique, on cherche à utiliser une approximation de la fonction de vraisemblance qui soit facilement calculable et non biaisée. L'approximation de la fonction de vraisemblance est construite en utilisant les propriétés des estimateurs du spectre de puissance angulaire. Ce point est l'objet de la section suivante.

5.1.2 Statistique des estimateurs

D'un point de vue pratique, le spectre de puissance angulaire n'est pas une grandeur directement accessible. On construit à partir des cartes du ciel un estimateur du spectre de puissance. Le choix de la fonction de vraisemblance découle des propriétés statistiques de cet estimateur.

Spectres de puissance angulaire de température

Le développement des anisotropies de température sur la base des harmoniques sphériques Y_l^m s'écrit :

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \Delta(\mathbf{n}) = \sum_{l,m} a_{lm}^T Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad (5.5)$$

Les coefficients complexes a_{lm}^T sont des variables aléatoires gaussiennes, de moyenne nulle. Les harmoniques sphériques Y_l^m vérifient la relation suivante :

$$Y_{lm}(\mathbf{n}) = (-1)^m Y_{l,-m}^*(\mathbf{n}) \quad (5.6)$$

En prenant le complexe conjugué de 5.5 et du fait que la température est une quantité réelle, on obtient en utilisant 5.6 :

$$a_{lm}^{T*} = (-1)^m a_{l,-m}^T \quad (5.7)$$

Cette relation implique que la variable a_{l0}^T est réelle.

L'isotropie de l'Univers impose que la variance des a_{lm}^T ne dépende pas de m , mais uniquement de l . On a donc :

$$\langle a_{lm}^T a_{l'm'}^{T*} \rangle = C_l^T \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.8)$$

On peut alors écrire les a_{lm}^T de la façon suivante [13] :

$$a_{lm}^T = \sqrt{C_l^T} \zeta_{lm} \quad (5.9)$$

où

- ζ_{l0} est une variable aléatoire réelle normale centrée de variance 1.
- ζ_{lm} est une variable aléatoire complexe telle que $\text{Re}(\zeta_{lm})$ et $\text{Im}(\zeta_{lm})$ soient des variables normales centrées de variance 1/2.

Le spectre de puissance C_l^T est estimé à l'aide de la grandeur \hat{C}_l^T , définie par :

$$\hat{C}_l^T = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}^T|^2 \quad (5.10)$$

\hat{C}_l^T est un estimateur du spectre de puissance. Compte tenu du fait que $|\text{Re}(\zeta_{lm})| = |\text{Re}(\zeta_{l,-m})|$ et $|\text{Im}(\zeta_{lm})| = |\text{Im}(\zeta_{l,-m})|$, l'estimateur \hat{C}_l^T est donc la moyenne de $(2l+1)$ variables aléatoires

gaussiennes de variance C_l . Du point de vue statistique, $(2l+1)\hat{C}_l^T/C_l^T$ suit donc une loi de χ^2 à $(2l+1)$ degrés de liberté de sorte que :

$$\langle \hat{C}_l^T \rangle = C_l^T \quad (5.11)$$

$$\langle \hat{C}_l^{T^2} - C_l^{T^2} \rangle = \frac{2C_l^T}{2l+1} \quad (5.12)$$

L'estimateur \hat{C}_l^T est donc non biaisé et sa variance est proportionnelle à C_l^T . Ce résultat est transposable aux estimateurs \hat{C}^E et \hat{C}^B . La variance 5.12 correspond à la meilleure précision possible (couverture du ciel complète, mesure non bruitée ...) que l'on peut obtenir sur la mesure du spectre de puissance. Elle est usuellement appelée variance cosmique.

Corrélation des grandeurs T et E

L'estimateur \hat{C}_l^{TE} du coefficient de corrélation entre les grandeurs T et E est défini de la façon suivante :

$$\hat{C}_l^{TE} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^T a_{lm}^{E*} \quad (5.13)$$

On vérifie que \hat{C}_l^{TE} est bien une grandeur réelle. Afin d'étudier les propriétés de cet estimateur, explicitons la nature statistique des coefficients a^T et a^E [13] :

$$a_{lm}^T = \sqrt{C_l^T} \zeta_1 \quad (5.14)$$

$$a_{lm}^E = \sqrt{C_l^E} \zeta_3 \quad (5.15)$$

$$= \frac{C_l^{TE}}{\sqrt{C_l^T}} \zeta_1 + \sqrt{C_l^E - \frac{(C_l^{TE})^2}{C_l^T}} \zeta_2 \quad (5.16)$$

On a posé $\zeta_{i,lm} = \zeta_i$ pour alléger l'écriture. Les variables ζ_1 et ζ_3 , de l'équation 5.16, sont des variables aléatoires gaussiennes corrélées. Les propriétés des variables ζ_i ont été définies dans la section précédente. On a introduit les variables indépendantes ζ_1 et ζ_2 pour expliciter la corrélation entre a^T et a^E . En utilisant l'expression des $a_{lm}^{E,T}$, on peut écrire la relation 5.13 sous la forme :

$$\hat{C}_l^{TE} = C_l^{TE} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l x_m^2 + \sqrt{C_l^E C_l^T - C_l^{TE^2}} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l x_m y_m \quad (5.17)$$

où x_i et y_i sont des variables aléatoires réelles suivant une loi normale. L'estimateur \hat{C}_l^{TE} apparaît donc comme une combinaison de deux variables aléatoires et ne suit pas une loi de probabilité simple. Nous discuterons de la statistique de cet estimateur plus loin.

Prise en compte du bruit instrumental

Du point de vue expérimental, la température mesurée dans le pixel associé à la direction \mathbf{u} correspond à la somme du signal du ciel convolué par le lobe effectif et du bruit. On a donc :

$$d(\mathbf{u}) = \int \Delta(\mathbf{u}') B(\mathbf{u}, \mathbf{u}') d\Omega' + n \quad (5.18)$$

où $d(\mathbf{u})$ est la température mesurée dans la direction \mathbf{u} , $\Delta(\mathbf{u}')$ est la température du ciel dans la direction \mathbf{u}' , $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ représente le lobe instrumental et n le bruit. On se place dans le cas où le lobe est à symétrie cylindrique. On a alors :

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = B(|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|) = \sum_l B_{Tl} P_l(\cos(\theta)) \quad (5.19)$$

avec $\cos(\theta) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$ et $B_{Tl} \simeq e^{-l^2 \sigma_b^2/2}$ pour un lobe gaussien de variance σ_b^2 .

Le lobe des voies polarisées est caractérisé par $B_{El} = B_{Bl} = B_{Pl}$. En développant la relation 5.18 dans l'espace harmonique, on obtient :

$$d_{lm}^T = a_{lm}^T B_{Tl} + n_{lm} \quad (5.20)$$

Le bruit étant supposé blanc et gaussien, on a :

$$\langle n_i n_j^* \rangle = \delta_{ij} \sigma_T^2 \quad (5.21)$$

Cette relation se traduit dans l'espace harmonique par [13] :

$$\langle n_{lm} n_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \sigma_T^2 \theta_p^2 \quad (5.22)$$

où θ_p correspond à la taille des pixels. La pixellisation est effectuée de sorte que θ_p corresponde à la largeur à mi-hauteur (Full Width Half Max) du lobe θ_{fwhm} . On pose usuellement $\sigma_T^2 \theta_p^2 = \omega_T^{-1}$, où ω_T donne une mesure de la sensibilité indépendante de la taille du pixel.

Les coefficients d_{lm}^T , étant la somme de variables gaussiennes de moyenne nulle, sont également des variables gaussiennes. Le bruit et le signal du ciel n'étant pas corrélés, la variance des d_{lm}^T correspond alors à :

$$\langle d_{lm}^T d_{l'm'}^{T*} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} (C_l^T B_{Tl}^2 + \omega_T^{-1}) = D_l^T \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.23)$$

La généralisation de cette relation ²⁰ conduit à [13] :

$$\langle d_{lm}^{X'} d_{l'm'}^{X*} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \left(C_l^{XX'} B_{Xl} B_{X'l} + \omega_{XX'}^{-1} \right) = D_l^{XX'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.24)$$

où $(X, X') \in \{T, E, B\}$. Le bruit n'étant pas corrélé d'une carte à l'autre, on a $\omega_{XX'}^{-1} = \delta_{XX'} \omega_X^{-1}$.

L'estimateur $\hat{D}_l^{XX'}$ du spectre de puissance est construit à partir des coefficients du développement en harmoniques sphériques :

$$\hat{D}_l^{XX'} = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l d_{lm}^{X*} d_{lm}^{X'} \quad (5.25)$$

On peut noter que $\hat{D}_l^{XX'}$ dérive également d'une loi de χ^2 . Les estimateurs $\hat{C}_l^{XX'}$ du spectre du signal du signal du CMB se déduisent de $\hat{D}_l^{XX'}$ via la relation 5.24 :

$$\hat{C}_l^{XX'} = (\hat{D}_l^{XX'} - \omega_{XX'}^{-1}) B_{Xl}^{-1} B_{X'l}^{-1} \quad (5.26)$$

Cette relation indique comment obtenir un spectre angulaire C_l à partir d'une carte : retirer au spectre la composante du bruit, puis corriger de l'effet de lobe. On vérifie facilement que $\hat{C}_l^{XX'}$ satisfait les relations 5.11 et 5.12, et forme donc un estimateur non biaisé.

La relation 5.26 donne également une méthode permettant de simuler le spectre susceptible d'être mesuré par une expérience. Il suffit dans l'hypothèse d'une couverture homogène de spécifier les caractéristiques instrumentales, niveau de bruit et taille du lobe, de l'expérience.

²⁰Pour $X \in \{T, E, B\}$, on symbolise indifféremment $\langle d_{lm}^X d_{lm}^{X*} \rangle$ par D_l^{XX} ou $D_l^X \dots$

5.1.3 Fonctions de vraisemblance

Cas des spectres TT, EE et BB

La fonction de vraisemblance se déduit à partir des propriétés statistiques des estimateurs. On a vu que l'estimateur \hat{C}_l^T dérive d'une loi de χ^2 à $(2l+1)$ degrés de liberté. On peut alors écrire dans le cas où les multipôles C_l sont indépendants :

$$\mathcal{L}(\hat{C}^T|C^T) = \prod_l \frac{1}{2^{(2l+1)/2} \Gamma((2l+1)/2)} \frac{2l+1}{C_l^T} \left((2l+1) \frac{\hat{C}_l^T}{C_l^T} \right)^{(2l+1)/2-1} e^{-\frac{1}{2}(2l+1) \frac{\hat{C}_l^T}{C_l^T}} \quad (5.27)$$

On obtient alors [1] :

$$-2 \ln \mathcal{L}(\hat{C}^T|C^T) = \sum_l (2l+1) \left(\ln \left(\frac{C_l^T}{\hat{C}_l^T} \right) + \frac{\hat{C}_l^T}{C_l^T} \right) + \text{termes sans } C_l^T \quad (5.28)$$

L'estimation des paramètres cosmologiques θ s'effectue par maximisation de la fonction de vraisemblance par rapport au spectre théorique $C_l^T(\theta)$. C'est pourquoi seuls les termes impliquant $C_l^T(\theta)$ jouent un rôle effectif dans la fonction $\ln \mathcal{L}$.

La prise en compte du bruit et de l'effet du lobe s'effectue en considérant l'estimateur D_l^T . On a vu que celui-ci dérive également d'une loi de χ^2 à $(2l+1)$ degrés de liberté. La forme de la fonction de vraisemblance reste donc inchangée. En utilisant les notations suivantes,

- $\hat{C}_l^T = \hat{D}_l^T B_{Tl}^{-2} - \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2}$
- $N_l = \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2}$

la relation 5.28 se généralise sous la forme :

$$-2 \ln \mathcal{L}(\hat{C}^T|C^T) = \sum_l (2l+1) \left(\ln \left(\frac{C_l^T + N_l}{\hat{C}_l^T + N_l} \right) + \frac{\hat{C}_l^T + N_l}{C_l^T + N_l} \right) + \text{constante} \quad (5.29)$$

On obtient une expression similaire pour les estimateurs des spectres EE et BB.

En pratique cependant, le signal galactique, intense à basse latitude, gêne la détection du signal du CMB dans cette portion du ciel. La zone correspondant au plan galactique est donc exclue de l'analyse. Cependant, les harmoniques sphériques ne forment plus une base orthogonale sur un ciel tronqué, ce qui se traduit par des corrélations entre les multipôles. Or, on a supposé pour obtenir l'expression 5.29 que les multipôles C_l étaient indépendants. Dans ce cas, on utilise une autre approche en approximant la fonction de vraisemblance.

Approximations de la fonction de vraisemblance

On ne considère tout au long de cette discussion que le spectre de puissance angulaire C^T . Les propriétés statistiques des estimateurs \hat{C}^{TT} , \hat{C}^{EE} et \hat{C}^{BB} étant similaires, les propriétés relatives au spectre TT sont transposables aux autres spectres.

Aux grandes valeurs de l , l'estimateur \hat{D}^T , comme somme de variables aléatoires, se comporte comme une variable gaussienne. La fonction de vraisemblance peut donc s'écrire comme :

$$\mathcal{L}_{Gauss}(\hat{C}^T|C^T) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{ll'} (C_l^T - \hat{C}_l^T) \Sigma_{ll'}^{-1} (C_{l'}^T - \hat{C}_{l'}^T) \right) \quad (5.30)$$

Le terme Σ désigne la matrice de covariance. Cette dernière encode les informations relatives au bruit, aux corrélations induites par les coupures sur le ciel ... Elle dépend du spectre de puissance théorique C^T . L'estimation de la fonction de vraisemblance implique donc le calcul du déterminant $|\Sigma|$. Pour éviter d'avoir à effectuer ce calcul, Verde *et al.* [25] tronquent l'expression 5.30 :

$$-2 \ln \mathcal{L}_{Gauss}(\hat{C}^T | C^T) = \sum_{l'} \left(C_l^T - \hat{C}_l^T \right) \Sigma_{l'l'}^{-1} \left(C_{l'}^T - \hat{C}_{l'}^T \right) + \text{autres termes} \quad (5.31)$$

Le terme $|\Sigma|$, qui est fonction des C_l^T , n'est pas pris en compte. On peut noter que les fonctions de vraisemblance 5.30 et 5.31 ne sont pas des fonctions gaussiennes du spectre théorique C^T .

On met en évidence, par Monte Carlo, que la fonction de vraisemblance gaussienne 5.31 est un estimateur biaisé de l'amplitude du spectre. En effet, dans le cas idéal où les modes sont indépendants, la matrice de covariance est simplement donnée par la covariance des estimateurs \hat{C}_l^T :

$$COV(\hat{C}_l^{T^2}) = \Sigma_l l = \frac{2}{2l+1} (C_l^T + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2})^2 \quad (5.32)$$

On effectue alors plusieurs réalisations de l'estimateur \hat{C}^T d'un spectre de puissance C_{ini}^T donné. On procède de la façon suivante :

- Une réalisation s'effectue en tirant chaque d_{lm} . Ces variables suivent une loi gaussienne.
- On génère à partir des d_{lm} les estimateurs \hat{C}_l^T via les relations 5.25 et 5.26.

Pour chacune de ces réalisations, on estime l'amplitude du spectre en effectuant un maximum de vraisemblance. On est donc amené à minimiser $-2 \ln \mathcal{L}$:

$$-2 \ln \mathcal{L}_{Gauss}(\hat{C}^T | C^T = AC_{ini}^T) = \sum_l \frac{2l+1}{2} \left(AC_{ini}^T l - \hat{C}_l^T \right)^2 / (AC_{ini}^T l + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2})^2, \quad (5.33)$$

par rapport au paramètre de normalisation A. On observe alors, figure 5.1, que la distribution de l'amplitude A maximisant 5.33 est centrée sur une valeur plus grande que 1. La fonction de vraisemblance 5.33 surestime donc systématiquement l'amplitude des fluctuations. Dans les conditions expérimentales de Planck, le biais est de l'ordre de 0,2 %.

Une autre approximation de la fonction de vraisemblance, appelée approximation lognormale, a été développée par Bond *et al.* [1]. Elle permet de prendre en compte les corrélations, tout comme l'approximation gaussienne. Elle prend en plus en compte la non gaussianité de la fonction de vraisemblance. En effectuant le même type de simulation que précédemment, on constate que cette approximation est également biaisée. Elle sous-estime systématiquement l'amplitude des fluctuations. Le biais est cependant moins important, ce qui indique que l'approximation lognormale est meilleure que l'approximation gaussienne. Dans le cadre de l'analyse des données de WMAP, Verde *et al.* [25] ont montré que l'on peut combiner les approximations gaussienne et lognormale afin d'obtenir une approximation non biaisée :

$$\ln \mathcal{L}_{wmap} = \frac{1}{3} \ln \mathcal{L}_{Gauss} + \frac{2}{3} \ln \mathcal{L}_{Logn} \quad (5.34)$$

Cette combinaison coïncide en fait au développement de la fonction de vraisemblance exacte jusqu'au troisième ordre autour du maximum. Ce point est discuté en annexe.

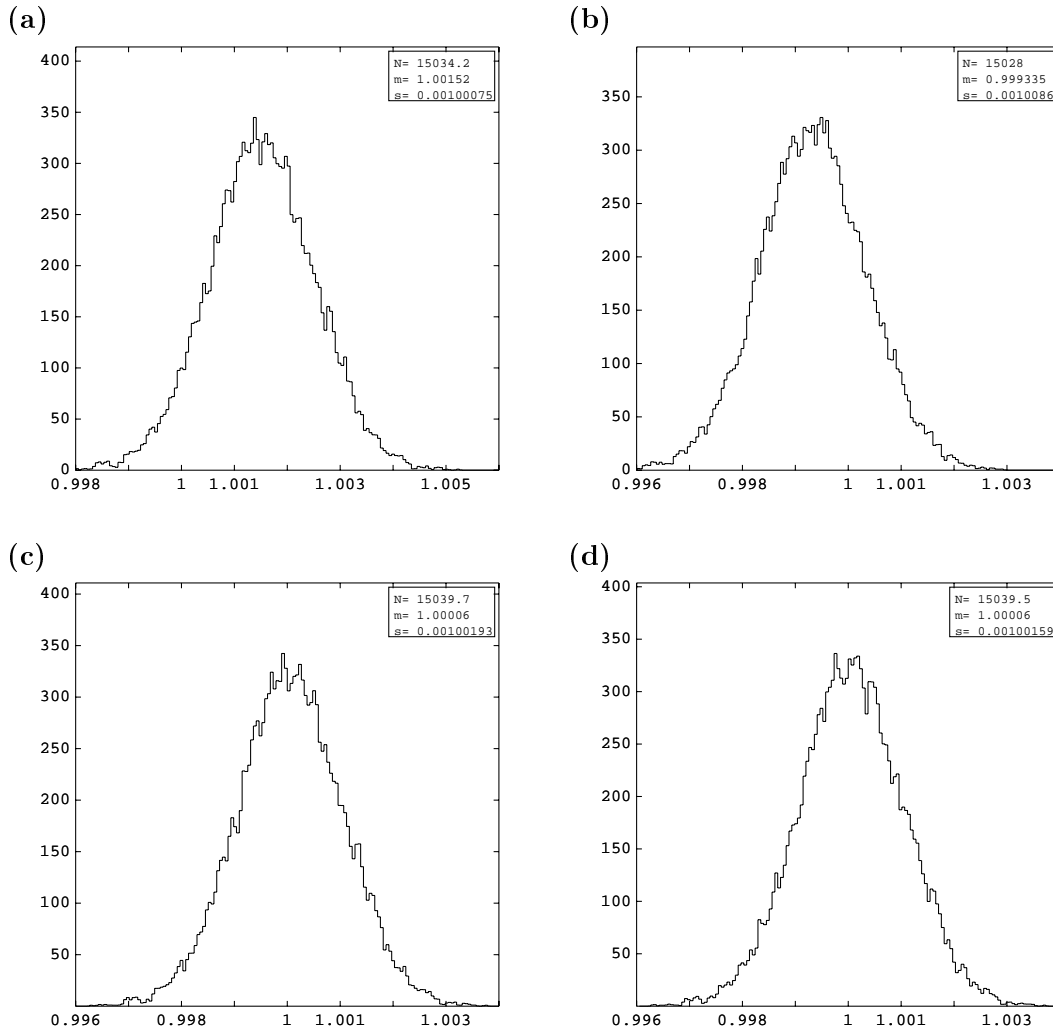


FIG. 5.1 – On a simulé, à partir d'un spectre C_l , 10000 réalisations de l'estimateur \hat{C}_l^T (jusqu'à $l=1500$). Pour chacune de ces réalisations, on détermine l'amplitude A du spectre par maximum de vraisemblance $\mathcal{L}(\hat{C}|AC)$. On a tracé les distributions de l'amplitude obtenue de cette façon pour différentes fonctions de vraisemblance. Ces distributions permettent de mettre en évidence la présence éventuelle de biais. Les fonctions de vraisemblance considérées sont l'approximation gaussienne (figure (a)), l'approximation lognormale (figure (b)), la combinaison des approximations gaussienne et lognormale (figure (c)) et enfin la fonction de vraisemblance non approximée (figure (d)).

La combinaison des approximations normale et lognormale proposée par l'équipe WMAP permet donc d'obtenir une fonction de vraisemblance également non biaisée dans les conditions de Planck.

Cas du spectre TE

On a vu que l'estimateur \hat{C}^{TE} ne suivait pas de loi statistique simple. On ne peut alors pas suivre la démarche qui a permis d'obtenir l'expression de la fonction de vraisemblance du spectre

C^{TT} . Notre objectif est de trouver une approximation, la moins biaisée possible, de la fonction de vraisemblance du spectre C^{TE} .

L'équipe de WMAP [25] utilise pour l'estimateur de \hat{C}^{TE} la fonction de vraisemblance gaussienne (tronquée) et montre que dans les conditions de bruit propre à WMAP, cette approximation n'est pas biaisée. Cependant, l'étude Monte Carlo du facteur de normalisation A montre, figure 5.2, que dans les conditions instrumentales de Planck l'approximation gaussienne introduit un biais de l'ordre du pourcent. Le biais est du même ordre de grandeur que la précision avec laquelle les paramètres cosmologiques sont susceptibles d'être déterminés ! L'approximation gaussienne 5.31 n'est donc pas appropriée pour l'exploitation des données de Planck.

Toutefois, la fonction de vraisemblance gaussienne 5.31 est elle-même une approximation de l'expression gaussienne complète 5.30. Dans le cas où les modes ne sont pas corrélés, on a :

$$-2 \ln \mathcal{L}_{Gauss}(\hat{C}^{TE} | C^{TE}) = \sum_l \left(C_l^{TE} - \hat{C}_l^{TE} \right)^2 \Sigma_l^{-1} + \sum_l \ln \Sigma_l \quad (5.35)$$

avec

$$\Sigma_{ll} = COV(C_l^{TE2}) = \frac{1}{2l+1} (C_l^{TE2} + (\hat{C}_l^T + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2})(C_l^E + \omega_P^{-1} B_{Pl}^{-2})) \quad (5.36)$$

L'étude Monte Carlo, figure 5.2, montre que l'estimateur 5.35 n'est pas biaisé. On vérifie également que la vraisemblance gaussienne 5.35 est non biaisée pour les composantes TT, EE, et BB.

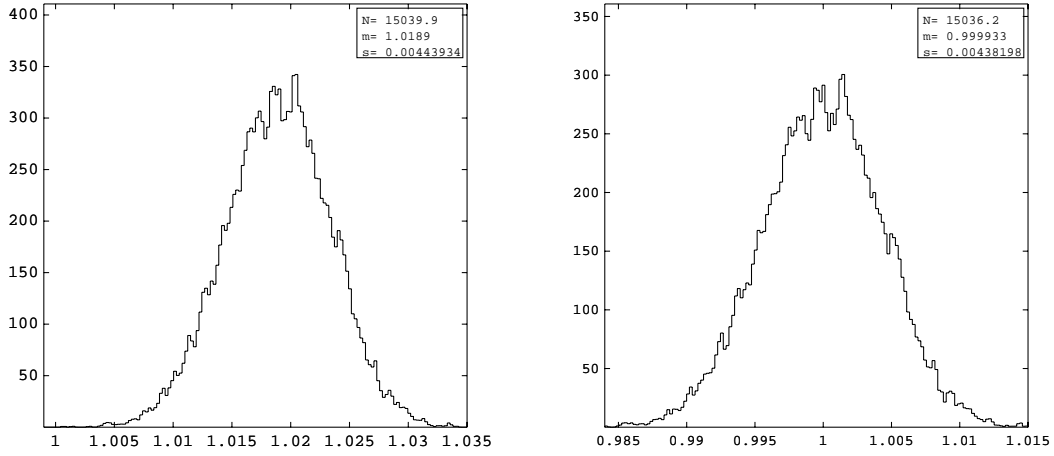


FIG. 5.2 – On a simulé 10000 réalisations de l'estimateur \hat{C}_l^{TE} (jusqu'à $l=1500$) à partir d'un spectre de puissance C_l donné. Pour chacune de ces réalisations, on détermine l'amplitude du spectre C^{TE} par maximum de vraisemblance. On a tracé les distributions de l'amplitude obtenues de cette façon avec :

- à gauche, l'approximation gaussienne (tronquée),
- à droite, l'approximation gaussienne (complète).

L'approximation gaussienne (tronquée) de la fonction de vraisemblance, utilisée par l'équipe WMAP, est biaisée dans les conditions de Planck. On dispose cependant d'un estimateur non biaisé avec l'approximation gaussienne complète.

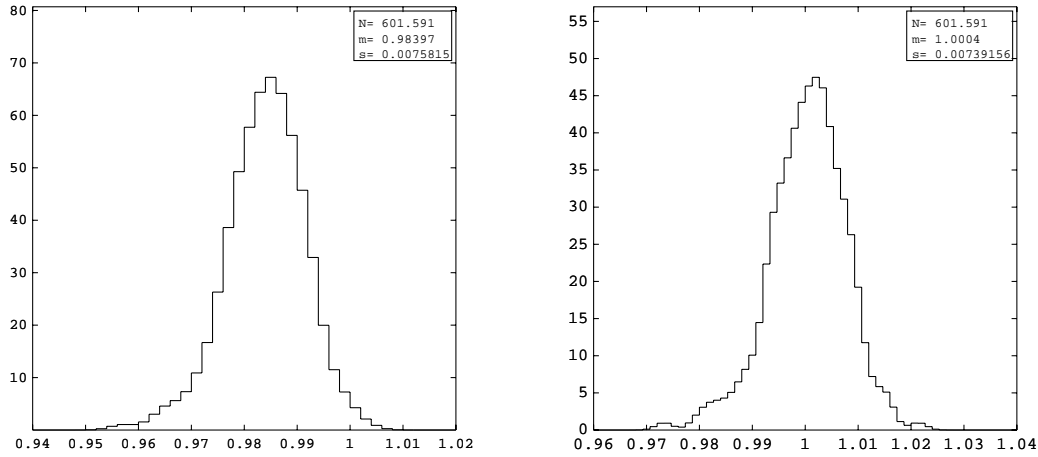


FIG. 5.3 – On a simulé 200 réalisations de l'estimateur \hat{C}_l^{TE} (jusqu'à $l=500$) à partir d'un spectre de puissance C_l donné avec $n_s=1$. Pour chacune de ces réalisations, on détermine l'indice spectral du spectre de puissance de la matière n_s par maximum de vraisemblance. On a tracé les distributions de l'indice spectral (en les lissant avec un noyau gaussien) obtenues avec :

- à gauche, l'approximation gaussienne (tronquée),
- à droite, l'approximation gaussienne (complète).

On vérifie bien que si l'estimation de l'amplitude est biaisée, alors l'estimation des autres paramètres (ici n_s) est également biaisée.

Nous n'avons en fait recherché de biais que sur l'amplitude des fluctuations. Ce paramètre correspond au facteur de normalisation du spectre de puissance angulaire. La maximisation de la fonction de vraisemblance ne nécessite donc pas l'utilisation d'un code de Boltzmann, l'influence de l'amplitude A étant triviale. On fait alors l'hypothèse que si le facteur de normalisation n'est pas biaisé, alors aucun autre paramètre n'est biaisé. On a vérifié cette supposition en recherchant un biais sur l'estimation de l'indice spectral n_s . Cette fois cependant, on doit utiliser un code de Boltzmann pour déterminer le spectre de puissance pour chaque valeur de l'indice spectral. La recherche de biais dans ce cas demande alors un temps de calcul beaucoup plus long. On vérifie alors également, voir figure 5.3, que la fonction de vraisemblance n'introduit pas de biais relativement à l'indice spectral.

Conclusion

Nous disposons d'une approximation non biaisée de la fonction de vraisemblance. On s'est placé dans le cas où les multipôles ne sont pas corrélés. La prise en compte de corrélations peut s'effectuer en utilisant la forme gaussienne 5.35 de la fonction de vraisemblance. L'évaluation de la fonction de vraisemblance demande alors le calcul du déterminant $|\Sigma|$. Ce calcul s'effectue typiquement en l^3 opérations, l étant la taille de la matrice Σ .

Dans le cadre de notre étude nous n'avons pas pris en compte les corrélations entre multipôles. Notre objectif principal est en effet d'obtenir dans un cadre réaliste, mais le plus simple possible, les contraintes sur les paramètres cosmologiques attendues pour Planck avec le type d'outils qui sera utilisé pour effectuer cette analyse.

La simplification majeure que nous avons faite dans notre analyse concerne la prise en compte du spectre à bas l . En effet, c'est à bas l que la statistique des estimateurs est la moins gaussienne. L'approximation de la fonction de vraisemblance n'est valable qu'au voisinage du maximum. La façon de prendre en compte correctement les premiers multipôles est décrite par Slosar *et al.* [23]. La méthode consiste à utiliser pour ces multipôles la fonction de vraisemblance associée à une carte dont la résolution est dégradée. Cette carte est dans ce cas suffisamment petite pour que l'évaluation numérique de la fonction 5.4 soit possible rapidement. En outre, cette méthode permet d'intégrer les effets d'avant-plans dans l'analyse.

La prise en compte de l'influence des avant-plans correspond à un degré de sophistication qui dépasse l'analyse préliminaire correspondant au travail exposé ici. Elle n'a donc pas été incluse. De ce fait, le comportement des bas multipôles ne présente pas de pathologies particulières. L'analyse effectuée précédemment montre en effet que la non gaussianité des premiers multipôles n'induit pas de biais dans notre étude.

5.1.4 Critère de Fischer

Nous avons vu que la comparaison entre le spectre de puissance correspondant à un modèle donné avec un spectre expérimental s'effectue via la fonction de vraisemblance. Il est cependant possible d'estimer les contraintes sur les paramètres cosmologiques que l'on peut attendre d'une expérience. Cette estimation repose sur l'utilisation de la matrice de Fisher. Cette dernière permet de déterminer la plus petite valeur des barres d'erreurs que peut atteindre une expérience.

La matrice de Fisher est définie à partir de la fonction de vraisemblance \mathcal{L} :

$$\mathcal{F}_{ij} = - \left\langle \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle \quad (5.37)$$

L'inégalité de Cramér-Rao indique que la variance associée au paramètre θ_i ne peut pas être inférieure à \mathcal{F}_{ij}^{-1} . Dans le cas où la fonction de vraisemblance est gaussienne, la matrice de Fisher correspond à la matrice de courbure, c'est à dire à l'inverse de la matrice de covariance. Si la fonction de vraisemblance n'est pas gaussienne, la matrice de Fisher est utilisée pour obtenir une approximation de la matrice de covariance. Dans le cadre des expériences de mesures des anisotropies du CMB, on a par exemple :

$$\mathcal{F}_{ij} = \sum_l \sum_{XY} \frac{\partial C_l^X}{\partial \theta_i} \text{COV}^{-1}(C_l^X, C_l^Y) \frac{\partial C_l^Y}{\partial \theta_j} \quad (5.38)$$

avec $(X,Y)=\{T,TE,E,B\}$. Les éléments de la matrice de covariance $\text{COV}^{-1}(C_l^X, C_l^Y)$ sont donnés en annexe. Ils ne dépendent que du modèle considéré, du niveau de bruit et de la taille du lobe.

La relation 5.38 permet donc d'estimer la précision avec laquelle une expérience, caractérisée par son niveau de bruit et son lobe, peut contraindre les paramètres cosmologiques. Les niveaux de confiance dans le plan $\theta_i - \theta_j$ ont alors une forme elliptique. Ils ne coïncident pas en général avec les contours que l'on obtiendrait à partir de la fonction de vraisemblance, sauf si cette dernière est effectivement gaussienne. L'utilisation de la matrice de Fisher permet aussi de mettre en évidence la présence de dégénérescences [8].

5.1.5 Problèmes liés à l'estimation des paramètres cosmologiques

L'équation 5.1 semble indiquer que la probabilité a posteriori $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$ s'obtient directement à partir de la vraisemblance $\mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta})$. Cependant, pour obtenir $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$, il faut également déterminer

le facteur de normalisation et donc effectuer l'intégration :

$$I = \int p(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{L}(\mathbf{C}|\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (5.39)$$

Or, cette intégration multidimensionnelle est techniquement difficile à réaliser. De plus, l'évaluation de la valeur de la fonction $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ passe par l'utilisation d'un code de Boltzmann, et prend donc un certain temps (de l'ordre de la seconde). Le temps de calcul de I peut donc vite devenir prohibitif.

Une première classe de méthode d'estimation des paramètres cosmologiques repose sur la discrétisation de l'espace des paramètres sur une grille multidimensionnelle. La valeur de la fonction de vraisemblance est alors calculée en chaque noeud de la grille. Si la position du maximum de vraisemblance est simple à trouver, la détermination des intervalles de confiance relatifs à chaque paramètre est plus difficile, car elle implique le calcul d'intégrales multidimensionnelles 5.3. Pour contourner cette difficulté, l'intervalle de confiance relatif à un paramètre θ_i est déterminé en fixant les autres paramètres à la position du maximum de vraisemblance [2] [7].

L'inconvénient principal de l'utilisation de grilles vient du fait que la taille d'une grille varie comme n^d , où n est le nombre de points par dimension (paramètre) et d le nombre de paramètres. La taille de la grille croît donc exponentiellement avec le nombre de paramètres, ce qui pose des problèmes en terme d'espace disque et de temps de calcul. Du fait de ces limitations, Christensen et Meyer [3] [4] ont suggéré une nouvelle approche basée sur l'utilisation de chaînes de Markov Monte Carlo (MCMC).

5.2 Utilisation des méthodes MCMC

5.2.1 Introduction

L'utilisation de MCMC comme moyen d'explorer l'espace des paramètres est rapidement devenu un des outils standards de ce type d'analyse. Le succès des MCMC vient essentiellement du fait qu'elles contournent les deux principales difficultés liées à l'utilisation de grilles :

- Le nombre d'opérations nécessaires croît linéairement avec le nombre de paramètres.
- La marginalisation s'effectue très simplement. Le calcul de l'intégrale 5.39 n'a pas besoin d'être effectué.

Du point de vue algorithmique, le principe de fonctionnement des MCMC est très simple et est détaillé dans la section suivante. La mise à la disposition de la communauté de codes MCMC [18] [5] [20] [6], comme CosmoMC²¹ a d'autant plus facilité la popularisation des MCMC.

5.2.2 Méthodes MCMC

Le principe des MCMC consiste à construire une suite de paramètres ($\{\boldsymbol{\theta}_i\} = \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots$) de sorte que ces paramètres $\{\boldsymbol{\theta}_i\}$ soient distribués suivant la probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$. Chaque point de l'espace des paramètres formant la suite $\{\boldsymbol{\theta}_i\}$ est déterminé à partir du point précédent. Une telle séquence est appelée chaîne de Markov. La méthode qui permet de générer une chaîne de Markov dont les éléments sont distribués suivant la probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{C})$ est appelé algorithme de Metropolis. L'algorithme de Metropolis fonctionne de la façon suivante :

- Phase d'initialisation. On choisit un point de l'espace des paramètres $\boldsymbol{\theta}_1$ comme point de départ de la chaîne.

²¹ CosmoMC a été développé par A. Lewis et S. Bridle, et fonctionne avec le code de Boltzmann CAMB.

- Recherche du maillon suivant de la chaîne. Un algorithme, appelé échantillonneur, recherche aléatoirement un candidat θ pour constituer le maillon suivant de la chaîne. Le choix s'effectue à l'aide d'une fonction $q(\theta_i, \theta)$, appelée base de la chaîne de Markov, indiquant la probabilité d'obtenir θ depuis le point θ_i . Le choix de cette fonction est laissé libre. La seule contrainte imposée concerne la symétrie de la fonction : $q(\theta_i, \theta) = q(\theta, \theta_i)$.
- Phase d'évaluation du candidat. On calcule le rapport :

$$\alpha = \frac{p(\theta|\mathbf{C})}{p(\theta_i|\mathbf{C})} = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{C}|\theta)}{\mathcal{L}(\mathbf{C}|\theta_i)} \quad (5.40)$$

On a vu que la probabilité $p(\theta|\mathbf{C})$ n'est pas connue du fait de la difficulté de déterminer le facteur de normalisation de l'équation 5.39. Cependant, l'expression de α fait intervenir le rapport de deux valeurs de $p(\theta|\mathbf{C})$, et ne dépend donc pas de ce facteur de normalisation. La valeur de α se calcule donc directement à l'aide de la fonction de vraisemblance \mathcal{L} . Si α est plus grand que 1, le candidat θ est accepté. Si α est plus petit que 1, le candidat θ est accepté avec la probabilité α . Si le candidat est accepté, alors θ est pris comme nouveau point de la chaîne : $\theta \rightarrow \theta_{i+1}$. Dans le cas contraire, on prend de nouveau le point θ_i : $\theta_i \rightarrow \theta_{i+1}$.

- Le processus est itéré jusqu'à ce que la chaîne soit "suffisamment longue".

Notons que, initialement, la chaîne se déplace vers la région de plus forte vraisemblance. Les premiers éléments de la chaîne ne sont pas distribués suivant la probabilité $p(\theta|\mathbf{C})$ et ne doivent donc pas être pris en compte dans l'analyse.

Les maillons de la chaîne générée par cet algorithme sont souvent corrélés. Cependant, le fait que la chaîne soit corrélée ne l'empêche pas d'être distribuée suivant la probabilité $p(\theta|\mathbf{C})$. Il faut cependant que celle-ci soit suffisamment longue. Plus la corrélation est importante, plus la chaîne doit être longue. La corrélation de la chaîne dépend de l'échantillonneur, c'est à dire de l'algorithme de recherche des candidats formant la chaîne. Le choix de l'échantillonneur joue donc un rôle important sur les performances du MCMC : plus l'échantillonneur minimise les corrélations, plus la chaîne peut converger rapidement. Une corrélation importante indique en général que l'échantillonneur peut être amélioré. Ce point sera l'objet de la section 5.2.4.

En pratique, une chaîne corrélée peut être réduite en ne gardant qu'un maillon sur k de la chaîne. Le facteur de réduction k est choisi afin de correspondre à la longueur de corrélation. La chaîne réduite converge vers la distribution cible de la même façon que la chaîne initiale. L'intérêt principal de cette réduction est de pouvoir diminuer l'espace mémoire occupé par la chaîne.

5.2.3 Convergence

L'algorithme MCMC a pour but de produire une (ou des) chaîne dont la distribution des éléments correspond à la probabilité $p(\theta|\mathbf{C})$. Si techniquement le processus de construction de la chaîne est simple, déterminer si la chaîne a convergé vers la distribution $p(\theta|\mathbf{C})$ est plus difficile. L'analyse de la convergence repose sur l'examen des critères suivants :

- l'exploration de l'espace des paramètres,
- la stationnarité de la chaîne,
- la précision avec laquelle les paramètres sont déterminés.

La chaîne peut rester pendant une longue période dans une petite région de l'espace des paramètres. Cela peut arriver par exemple si la fonction de vraisemblance possède des minima secondaires. L'utilisation de plusieurs chaînes, commençant dans des régions éloignées les unes

des autres, permet de mettre en évidence cette pathologie. Cette dernière est associée à une convergence très lente de la chaîne. Elle indique que la méthode de déplacement qui permet de choisir les maillons de la chaîne n'est pas adaptée.

Une des difficultés liées à l'utilisation des MCMC vient du fait qu'il n'y a pas de critère unique qui permette de spécifier si une chaîne a convergé. Plusieurs tests de convergence ont été développés. Nous utiliserons en particulier deux d'entre eux : le test de Gelman et Rubin et le test de Raftery-Lewis.

Le test de Gelman et Rubin, utilisé par l'équipe WMAP [25], compare les valeurs de deux estimateurs de la variance d'un paramètre. Supposons que l'on dispose de M chaînes formées de N maillons. On note y_{ij} le maillon i de la chaîne j , \bar{y}_j la moyenne de la chaîne j et \bar{y} la moyenne de tous les maillons. On définit alors la variance moyenne des M chaînes W comme

$$W = \frac{1}{M} \sum_j \frac{1}{N-1} \sum_i (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 \quad (5.41)$$

W est un estimateur de la variance du paramètre y . W sous-estime la variance de y si les chaînes n'ont pas convergé. On définit un autre estimateur de la variance :

$$V = \frac{1}{MN} \sum_{ij} (y_{ji} - \bar{y})^2 = \frac{N-1}{N} W + \frac{M-1}{M} B \quad (5.42)$$

où on a introduit la quantité B , correspondant à la variance entre les chaînes, définie par :

$$B = \frac{1}{M-1} \sum_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2 \quad (5.43)$$

Si les chaînes n'ont pas convergé, V surestime alors la variance. En effet, les chaînes étant originaires de différentes régions, les moyennes \bar{y}_j peuvent, au départ, être très différentes d'une chaîne à l'autre. La valeur B est donc initialement élevée. Quand le nombre de maillons augmente, \bar{y}_j tend vers \bar{y} . La valeur de B tend alors vers 0. Le rapport des estimateurs $R = V/W$ tend donc vers 1. En pratique une valeur de R inférieure à 1,2 pour tous les paramètres est considérée comme un bon indicateur de convergence [25].

Le test de Raftery-Lewis permet d'obtenir des informations plus complètes concernant les propriétés d'une chaîne. Il détermine en particulier la longueur de chaîne nécessaire [22] et fonctionne sur le principe suivant. La chaîne est transformée en une séquence binaire dont on détermine les probabilités de transition d'un état à l'autre. A partir de ces probabilités de transition, on obtient le nombre de maillons initiaux à rejeter, le facteur de réduction et enfin la longueur de chaîne nécessaire pour atteindre la précision souhaitée.

5.2.4 Construction de chaînes

On a vu que les propriétés de la chaîne dépendent de la façon dont s'effectue le choix des candidats, et donc de l'échantillonneur utilisé. Il y a par exemple un équilibre à trouver sur la taille du pas de chaque déplacement dans l'espace des paramètres. Un pas trop grand conduit à un rejet fréquent des candidats, la chaîne reste donc longtemps au même point. La convergence est alors très lente. De même, avec un pas trop petit, l'exploration de l'espace des paramètres va prendre beaucoup de temps, ce qui conduit également à une convergence lente. De plus, même si le pas des déplacements est adapté, la présence de dégénérescences ralentit également la convergence

de la chaîne si l'échantillonneur n'est pas optimisé. Supposons en effet que l'échantillonneur effectue des déplacements via une distribution gaussienne. La présence d'une dégénérescence entre deux paramètres θ_1 et θ_2 se manifeste par un étirement des contours associés aux intervalles de confiance. La direction de cet étirement ne coïncide pas avec celles des paramètres. La région de forte vraisemblance correspond donc à une vallée étroite que la chaîne peine alors à explorer, ce qui ralentit d'autant sa convergence.

Plusieurs stratégies permettent d'optimiser l'échantillonneur. L'échantillonneur de CosmoMC détermine après une première exploration de l'espace, la matrice de covariance des paramètres. La diagonalisation de la matrice de covariance permet alors de trouver les directions propres de l'espace des paramètres.

Kosowsky *et al.* [17] ont proposé d'utiliser des paramètres plus adaptés aux caractéristiques du spectre de puissance angulaire. La principale avancée consiste à utiliser l'échelle angulaire l_1 associée au premier pic acoustique :

$$l_1 = k_1(\eta_0 - \eta^*) = \pi \frac{(\eta_0 - \eta^*)}{r_s^*} = \pi \frac{D_A^*}{r_s^*} \quad (5.44)$$

où r_s^* et D_A^* sont l'horizon acoustique et la distance angulaire (comobiles) au moment du découplage. La valeur de $\Theta = r_s^*/D_A^*$, l'angle associé au premier pic, est une fonction des paramètres $(\Omega_c, \Omega_b, \Omega_\nu, h)$. Pour un jeu de paramètres $(\Omega_c, \Omega_b, \Omega_\nu)$ donné, la correspondance entre h et Θ est univoque. Les paramétrisations utilisant h ou Θ sont donc équivalentes. Cependant, l'utilisation de Θ , à la place de h permet de réduire les dégénérescences entre paramètres. Cette plus grande indépendance entre les paramètres assure une meilleure exploration, et donc facilite la convergence des chaînes.

5.3 Perspectives de la mission Planck

5.3.1 Influence des neutrinos sur le CMB

Nous avons vu que le spectre de puissance de la matière était sensible à la masse des neutrinos, ceux-ci introduisant une suppression des fluctuations aux échelles plus petites que la distance parcourue librement (freestreaming scale). Regardons maintenant l'effet des neutrinos sur le spectre de puissance des anisotropies du CMB.

La figure 5.4 montre l'influence de la masse des neutrinos sur le spectre de puissance angulaire. On ne considère que des neutrinos dont la masse est inférieure à 0,3 eV, c'est à dire ultra-relativistes au moment du découplage. On s'attend donc à ce que leur effet sur le spectre de puissance angulaire soit donc très peu différent de celui des neutrinos non massifs.

On observe sur la figure 5.4 un déplacement de la position des pics vers les petites valeurs de l lorsque la masse augmente. Ce comportement s'explique de la façon suivante. Les neutrinos plus massifs deviennent non relativistes plus tôt. Leur contribution à la densité d'énergie de radiation est de plus en plus réduite au fur et à mesure qu'ils deviennent non relativistes. Leur contribution à la densité de matière, lorsqu'ils sont non relativistes, est cependant marginale du fait de leur faible masse. La diminution de la contribution des neutrinos à la densité d'énergie relativiste se traduit par une diminution du taux d'expansion. Plus la masse des neutrinos est élevée, plus la densité d'énergie relativiste diminue. La distance nous séparant de la couche de dernière diffusion est alors plus petite, ce qui augmente la taille angulaire des anisotropies et donc déplace les pics vers les petites valeurs de l .

On constate que l'impact de la masse des neutrino sur la forme du spectre de puissance est assez faible. Une variation de 50% de la masse ne modifie la valeur du spectre que d'un facteur inférieur à 5%. Ce résultat montre que le spectre de puissance est assez peu sensible à la valeur de la masse des neutrinos. Il semble donc a priori que les contraintes qui vont être obtenues sur ce paramètre risque d'être lâche.

5.3.2 Détermination des paramètres cosmologiques

Pour étudier les possibilités de la mission Planck vis-à-vis de la détermination des paramètres cosmologiques, nous réalisons un jeu de données simulées. Ces données simulées sont constituées des spectres de puissance TT, TE et EE générés en utilisant les caractéristiques instrumentales de Planck données au chapitre 2 et un modèle d'Univers dont les paramètres sont donnés table 5.3.2. Les spectres simulés couvrent une gamme spectrale l allant de 2 à 2500 pour le spectre TT et de 2 à 2000 pour les spectres TE et EE.

On a considéré un modèle d'Univers plat. Les données de WMAP indiquent en effet que la densité totale de l'Univers Ω est compatible avec 1 [24], valeur prédite par la plupart des modèles d'inflation. D'autre part, on a supposé que les masses des neutrinos sont dégénérées. C'est la configuration du spectre de masse (actuellement non paramétrable) dans les versions publiques des codes de Boltzmann CAMB ou CMBfast.

Notre objectif est de déterminer la valeur de 8 paramètres cosmologiques ($\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, f_ν , h , A_s , r , τ) caractérisant le modèle d'Univers à partir des données simulées. Comme nous nous intéressons essentiellement à l'influence de la masse des neutrinos sur la détermination des paramètres cosmologiques, nous n'avons pas fait varier l'indice spectral des perturbations tensorielles. La dé-

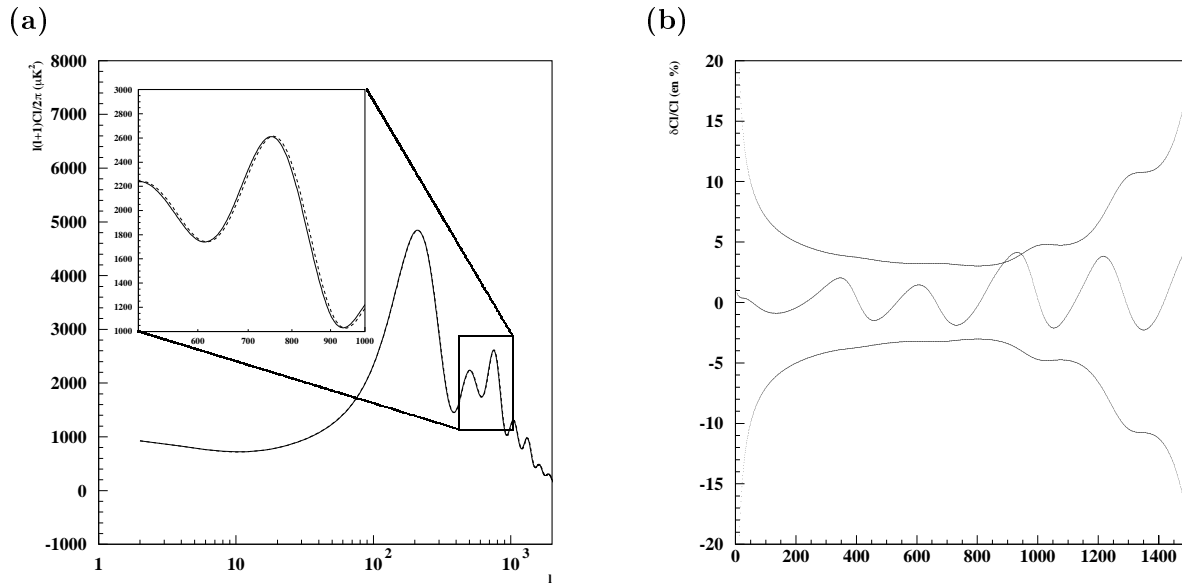


FIG. 5.4 – Ces figures montrent l'influence de la valeur de la masse totale de neutrinos sur le spectre de puissance angulaire du CMB. La figure de gauche montre les spectres de puissance C^{TT} correspondant à une densité d'énergie $\Omega_\nu h^2 = 0,005$ (trait continu) ($\Sigma m_\nu = 0.471$ eV) et $\Omega_\nu h^2 = 0,0025$ (pointillés). On fait varier $\Omega_\nu h^2$ et h de sorte que $\Omega = 1$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_b h^2 = 0,024$, et $\Omega_{cdm} h^2 = 0,12$. La figure de droite compare la différence relative entre les deux spectres avec la valeur de l'erreur associée à une déviation standard ($\pm 1\sigma$) attendue pour Planck.

paramètre	symbole	valeur
densité de baryons	$\Omega_b h^2$	0,024
densité de matière noire froide	$\Omega_c h^2$	0,12
densité de neutrinos	$\Omega_\nu h^2$	0,005
constante de Hubble	h	0,70
amplitude des fluctuations scalaires (μK^2)	A_s	$22 \cdot 10^{-10}$
indice spectral scalaire	n_s	1.0
rapport amplitude tensorielle/ amplitude scalaire	$r = A_t/A_s$	0,10
profondeur optique	τ	0,10
indice spectral tensoriel	n_t	0
Paramètres dérivés		
densité de matière noire	$\Omega_{dm} = \Omega_c + \Omega_\nu$	0.2551
densité de matière	$\Omega_m = \Omega_{dm} + \Omega_b$	0.3041
densité d'énergie noire	Ω_Λ	0.6959
fraction de neutrino	$f_\nu = \Omega_\nu / (\Omega_\nu + \Omega_c)$	0,04
somme des masses de neutrinos (eV)	$\sum m_\nu$	0,4705
fluctuation à $8 h^{-1}$ Mpc	σ_8	0.76194
Age de l'Univers (10^9 années)	Age	13.411

TAB. 5.1 – Paramètres utilisés pour la simulation des données de Planck. On se place dans le cadre d'un Univers plat.

termination des paramètres s'effectue en utilisant un algorithme de type MCMC. Nous avons utilisé le code public CosmoMC [18].

Comme nous l'avons signalé dans les sections précédentes, il existe des dégénérescences entre les paramètres cosmologiques. Des valeurs différentes de paramètres peuvent conduire à des spectres de puissance angulaire très proches. L'efficacité des algorithmes MCMC est réduite par la présence de dégénérescence entre les paramètres. Ces dernières obligent à produire des chaînes plus longues et augmentent d'autant le temps de calcul nécessaire.

Pour faciliter la convergence des chaînes, nous utilisons le paramétrage proposé par Kosowsky *et al.* et implémenté dans CosmoMC. On utilise donc comme paramètres ($\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, f_ν , Θ , $\log A_s$, r , τ) pour caractériser chaque modèle d'Univers.

Pour explorer l'espace à 8 dimensions des paramètres, une trentaine de chaînes ont été utilisées. Chaque chaîne est amorcée depuis un point différent de l'espace. L'utilisation de plusieurs chaînes assure une bonne exploration de la fonction de vraisemblance. On vérifie, 5.3.2, que l'utilisation de la paramétrisation ($\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, f_ν , h, A_s , r , τ) conduit à une faible vitesse de convergence des chaînes par rapport à la paramétrisation ($\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, f_ν , Θ , $\log A_s$, r , τ).

Pour augmenter la rapidité de convergence des chaînes, on construit dans un premier temps une chaîne afin de déterminer la matrice de covariance des paramètres. Dans un deuxième temps, plusieurs chaînes sont générées simultanément, le déplacement dans l'espace des paramètres s'effectuant le long des directions propres de la matrice de covariance. Le tableau 5.3.2 montre l'amélioration apportée par l'utilisation de la matrice de covariance sur les caractéristiques d'une chaîne. Ces caractéristiques sont déterminées à l'aide du test de Raftery-Lewis. Le résultat du test met en évidence que la longueur de corrélation ainsi que la longueur de chaîne nécessaire pour converger sont plus petites lorsque l'on utilise la matrice de covariance.

La figure 5.5 montre l'évolution du paramètre R associé au test de Gelman-Rubin. Une valeur

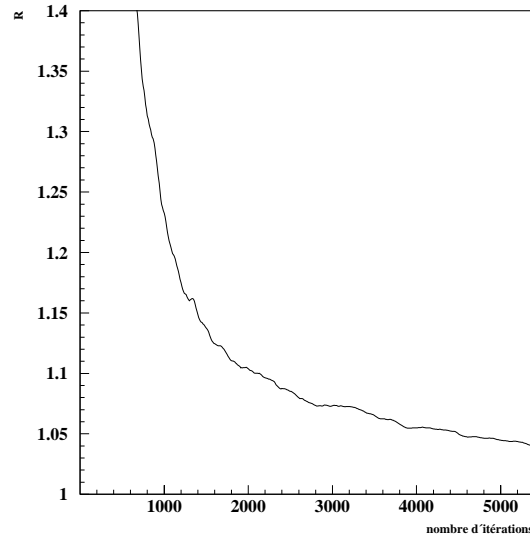


FIG. 5.5 – Le paramètre R du test de Gelman-Rubin représente les propriétés associées à la convergence des chaînes utilisées. On a déterminé la valeur de R pour chacun des paramètres. La valeur tracée correspond à la valeur maximale de R pour chaque maillon de la chaîne.

R_i est déterminée pour chacun des paramètres θ_i à chaque étape de la construction des chaînes. On ne retient que la valeur la plus grande $R = \max R_i$. La valeur de R décroît au fur et à mesure de la convergence des chaînes. Le critère de convergence classique correspond à $R < 1,2$ [15] [25]. Dans le cadre des analyses CMB, une valeur limite de R plus contraignante est recommandée. L'équipe WMAP conseille $R < 1,1$ [25]. Dans notre étude, nous avons utilisé 30 chaînes formées en moyenne de 5000 échantillons. Le valeur du paramètre Gelman-Rubin correspond alors à 1,05. Les différentes chaînes sont finalement réunies pour n'en former qu'une seule constituée d'environ 150000 éléments.

Les calculs ont été effectués au centre de calcul de l'IN2P3 de Lyon-Villeurbanne (CC-IN2P3) et sur la machine MAGIQUE de Planck-HFI à l'IAP. Pour fixer les idées, il faut en pratique pour construire une chaîne assez longue avec les ressources du CC-IN2P3 utiliser séquentiellement 5 à 6 jobs de type S (les jobs de type S ont un temps de calcul alloué correspondant à environ 10h sur un

Type de paramètres	Matrice de covariance	Longueur de corrélation	Longueur de relaxation	Longueur minimale nécessaire
Classique : $H_0, \Omega_m \dots$	non	119	3186	271520
Classique : $H_0, \Omega_m \dots$	oui	30	464	43560
Kosowsky : $\Theta, \Omega_m \dots$	non	170	2380	216240
Kosowsky : $\Theta, \Omega_m \dots$	oui	20	230	21820

TAB. 5.2 – Le tableau donne les caractéristiques de différentes chaînes en utilisant le critère de Raftery-Lewis.

Paramètres	Contraintes		
	moyenne	intervalle de confiance	précision (en %)
$\Omega_b h^2$	0,02398	0,02382 - 0,02415	0,69
$\Omega_{dm} h^2$	0,1262	0,1213 - 0,1305	3,5
Θ	1,055	1,055 - 1,055	0,031
f_ν	0,05174	0,03486 - 0,06931	57
τ	0,102	0,09966 - 0,1043	4,9
n_s	0,9994	0,9954 - 1,004	0,51
$\log[10^{10} A_s]$	3,094	3,083 - 3,104	0,33
A_t/A_s	0,1156	0,05694 - 0,1732	48
H_0	68,91	65,60 - 72,83	4,7
Ω_Λ	0,6807	0,6413 - 0,7257	5,9
Age/GYr	13,48	13,27 - 13,66	1,3
Ω_m	0,3193	0,2743 - 0,3587	13
σ_8	0,7368	0,6607 - 0,8282	10
$\sum m_\nu$	0,6734	0,1857 - 1,098	63

TAB. 5.3 – Cette table donne les contraintes obtenues avec Planck sur les paramètres cosmologiques à partir de données simulées. La précision, correspondant au rapport entre la valeur moyenne et la déviation standard, donne une idée de la qualité de la contrainte.

Pentium 4 à 2,4 GHz)²². Au CC-IN2P3, la fabrication de N chaînes s'effectue indépendamment sur N machines, le temps de calcul ne dépend pas du nombre de chaînes (si elles sont en nombre suffisamment limité). La réalisation du MCMC demande donc environ 3 jours de calcul. J'ai utilisé MAGIQUE pour construire les chaînes préliminaires utilisées pour calculer la matrice de covariance des paramètres.

Résultats et discussion

Les fonctions de vraisemblance marginalisées se déduisent directement à partir des MCMC. La fonction de vraisemblance du paramètre θ_i correspond à la distribution des valeurs de θ_i dans la chaîne. La table 5.3.2 indique les niveaux de confiance à 68% obtenus pour chaque paramètre. On note que la précision avec laquelle Planck est susceptible de déterminer la valeur d'un paramètre cosmologique est variable d'un paramètre à l'autre. On distingue dans la table 5.3.2 trois types de paramètre :

- les paramètres très bien contraints comme l'indice spectral n_s , l'amplitude du spectre ou encore la densité de baryons $\Omega_b h^2$. L'incertitude sur ces paramètres est inférieure au pourcent.
- les paramètres bien contraints tels que les densités Ω_m , Ω_b , la constante de Hubble H_0 , ou encore σ_8 . La précision sur ces paramètres est de quelques pourcents.
- les paramètres peu contraints. Il s'agit de la fraction de neutrino f_ν et du rapport r des amplitudes des contributions tensorielles et scalaires au spectre de puissance angulaire.

La faible contrainte sur l'amplitude relative de la composante tensorielle vient du fait que nous n'avons pas utilisé dans cette simulation les informations associées au mode de polarisation B. Le mode B est généré par les perturbations de type tensoriel, c'est à dire les ondes gravitationnelles.

²²La description de ressources du centre de calcul et la façon de les exploiter sont précisées sur le site : <http://webcc.in2p3.fr/>

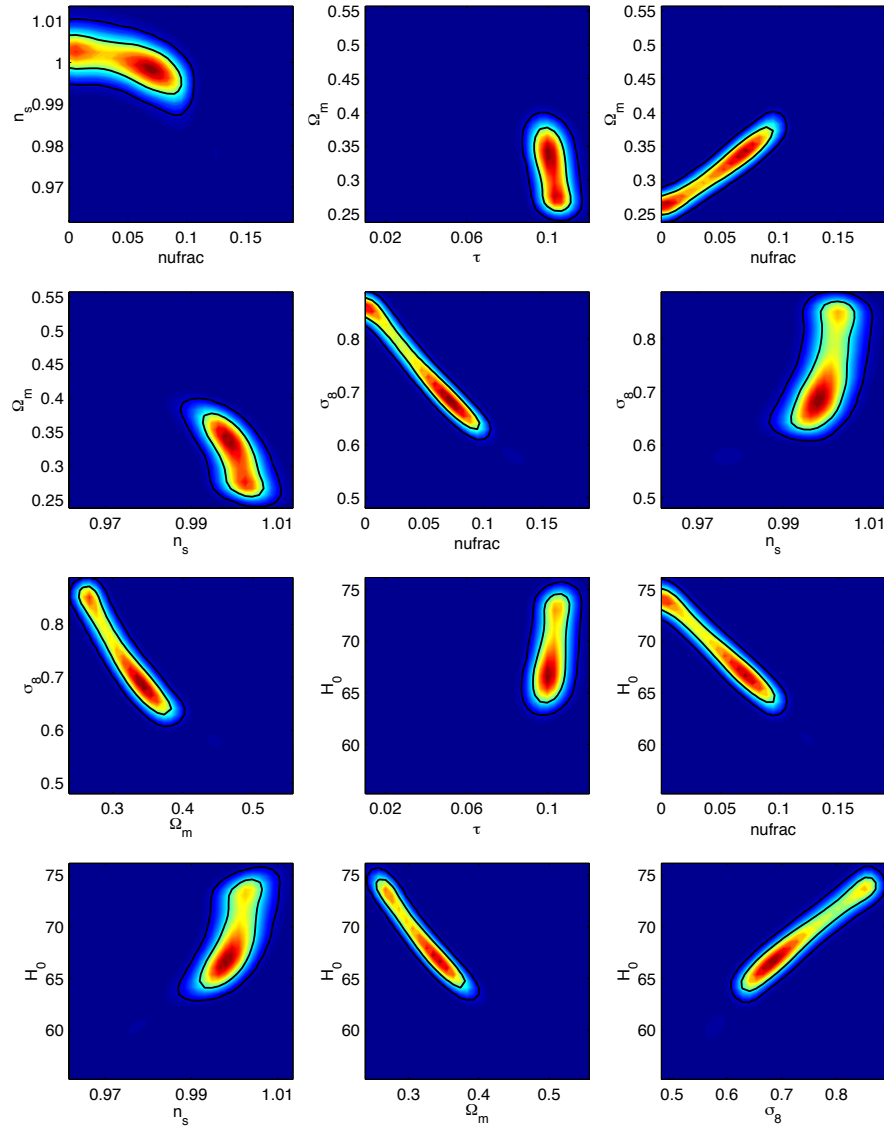


FIG. 5.6 – Les figures montrent les contraintes obtenues avec des données simulées de Planck. Les contours correspondent aux niveaux de confiance à 68 % et 95 %.

Leur détection, éventuelle, donne alors accès à l'amplitude des perturbations tensorielles. Nous avons supposé dans cette analyse que le mode B produit par les ondes gravitationnelles n'est pas détecté.

La figure 5.6 montre les contours bidimensionnels à 68 % et 95 %. On observe la présence de dégénérescences entre des paramètres tels que la fraction de neutrinos f_ν , la constante de Hubble H_0 , le niveau de fluctuation σ_8 , ou encore la densité de matière Ω_m . Ces dégénérescences sont associées au fait que la fraction de neutrinos soit peu contrainte. En effet, on vérifie que si l'on ajoute de l'information relativement à la masse des neutrinos les dégénérescences disparaissent. La prise en compte d'informations complémentaires s'effectue via l'utilisation d'une probabilité a priori (prior) $p(\theta)$. La valeur moyenne d'un paramètre θ_i est obtenue à partir de la chaîne

Paramètres	Contraintes avec a priori sur la masse de neutrino		
	moyenne	intervalle de confiance	précision (en %)
$\Omega_b h^2$	0,02403	0,02390 - 0,02416	0,56
$\Omega_{dm} h^2$	0,1245	0,1231 - 0,1259	1,1
Θ	1,055	1,055 - 1,055	0,024
f_ν	0,04029	0,03755 - 0,04296	14
τ	0,103	0,1008 - 0,1050	4,4
n_s	1,001	0,9980 - 1,005	0,33
$\log[10^{10} A_s]$	3,096	3,087 - 3,105	0,29
A_t/A_s	0,1047	0,05057 - 0,154	49
H_0	70,12	69,27 - 70,95	1,2
Ω_Λ	0,6978	0,6878 - 0,7075	1,4
$Age(GYr)$	13,41	13,37 - 13,33	0,30
Ω_m	0,3022	0,2925 - 0,3122	3,2
σ_8	0,7621	0,7461 - 0,7780	2,1
$\sum m_\nu$	0,4926	0,4169 - 0,5693	16

TAB. 5.4 – Cette table donne les contraintes obtenues avec Planck sur les paramètres cosmologiques à partir de données simulées. La précision, correspondant au rapport entre la valeur moyenne et la déviation standard, donne une idée de la qualité de la contrainte.

comme :

$$\langle \theta_i \rangle = \frac{\int d\theta \mathcal{L}(\theta) \theta_i}{\int d\theta \mathcal{L}(\theta)} = \frac{1}{N} \sum' \theta_i \equiv \frac{1}{N} \sum \mathcal{L}(\theta) \theta_i \quad (5.45)$$

Le terme \sum' indique que les valeurs de θ_i sommées sont pondérées suivant la fonction de vraisemblance \mathcal{L} . On utilise l'information complémentaire en modifiant le poids associé aux maillons de la chaîne :

$$\mathcal{L}(\theta) \rightarrow \mathcal{L}(\theta)p(\theta) \quad (5.46)$$

La valeur moyenne de θ_i devient alors :

$$\langle \theta_i \rangle = \frac{1}{N} \sum' p(\theta) \theta_i \quad (5.47)$$

La table 5.3.2 et la figure 5.7 montrent les résultats obtenus en ajoutant une contrainte sur la masse des neutrinos correspondant à une incertitude de l'ordre de 10% sur la valeur de f_ν . Une fois levée l'indétermination sur la masse des neutrinos, on constate que les contraintes sur les paramètres cosmologiques tels que H_0 et σ_8 sont considérablement améliorées. On note également en comparant les valeurs des paramètres obtenues et celles utilisées pour effectuer la simulation qu'il n'y a pas de paramètres à plus d'un 1σ de la valeur utilisée dans la simulation. Il n'y a donc pas d'indication manifeste de la présence de biais dans notre analyse. Pour conclure sur ce point, l'approche classique consiste à effectuer une analyse Monte Carlo. Le temps de calcul nécessaire au MCMC ne permet cependant pas ce type d'approche. Une approche alternative consiste à tester individuellement la présence de biais sur chaque paramètre. Nous avons effectué, partiellement, cette étude dans la section 5.1.3. Nous avons montré alors que les fonctions de vraisemblance utilisées n'étaient pas biaisées.

En pratique la levée des dégénérescences s'effectue en utilisant de nouvelles contraintes sur les paramètres cosmologiques. Ainsi, si l'on parvient à mesurer plus précisément la valeur de σ_8 ,

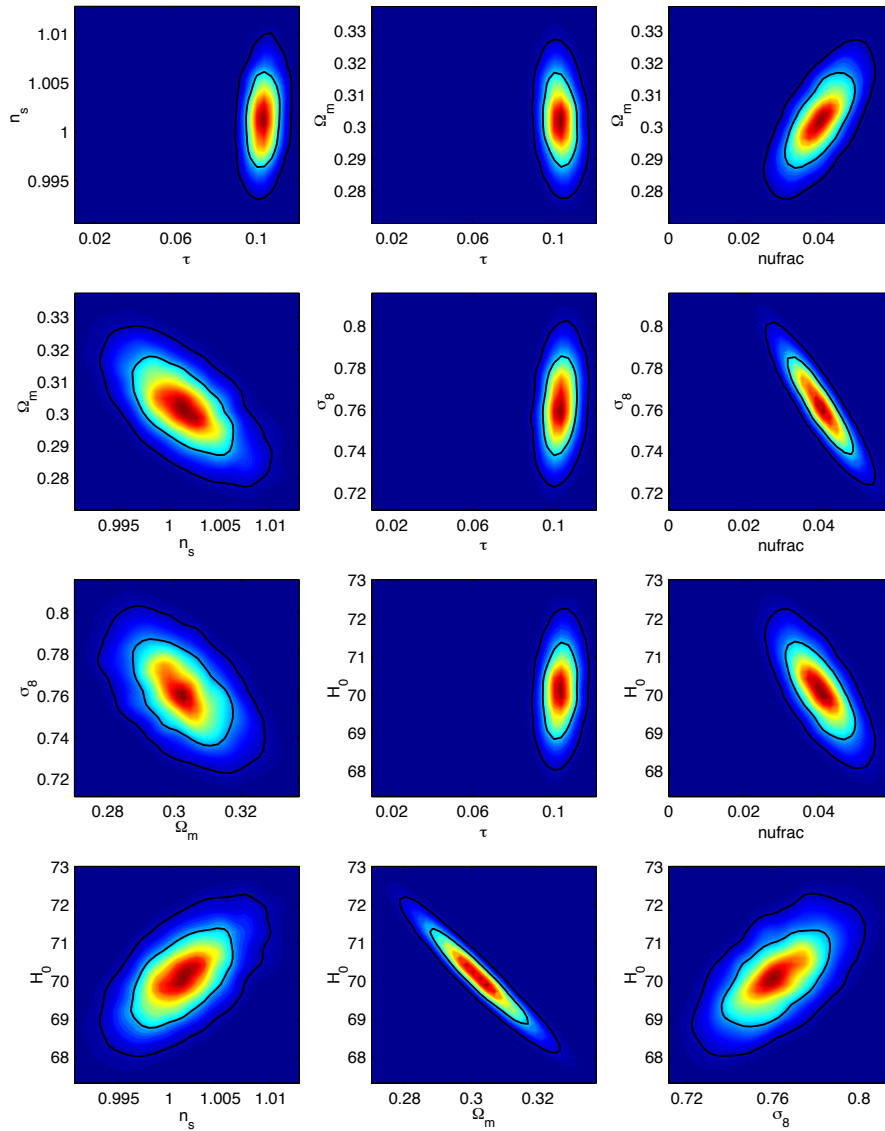


FIG. 5.7 – Les figures montrent les contraintes obtenues avec des données simulées de Planck. Les contours correspondent aux niveaux de confiance à 68% et 95%. Les contraintes ont été ajustées en utilisant comme probabilité a priori $f_\nu = 0,04 \pm 0,004$. Cette contrainte lève les dégénérescences observées précédemment, ce qui montre qu'elles sont associées à l'influence des neutrinos.

on accède également à la masse des neutrinos du fait des contraintes obtenues par Planck. Les neutrinos de masse $m_\nu < T_{dec} (\simeq 0,3 \text{ eV})$ sont relativistes au moment du découplage matière-rayonnement. Ces derniers ont une faible influence sur le spectre de puissance angulaire du CMB. Cependant, ils modifient l'évolution du potentiel gravitationnel et donc la dynamique de formation des structures. Les limites cosmologiques actuelles sur la masse des neutrinos proviennent de l'utilisation combinée des observations CMB et du spectre de puissance de la matière.

L'étude des amas de galaxies est une voie particulièrement intéressante pour obtenir des contraintes sur la masse des neutrinos. Plusieurs méthodes permettent d'exploiter l'information encodée par la dynamique des amas. Komatsu et Seljak [16] ont par exemple montré que le

spectre de puissance angulaire associé à l'effet SZ thermique est très sensible à la valeur de σ_8 . Cependant, les différents codes de calcul ne convergent actuellement pour un modèle donné vers le même résultat qu'à un facteur deux près. Ces divergences sont dues essentiellement au fait que la physique intra amas est complexe et mal connue. Toutefois, compte tenu du fait que l'amplitude du spectre varie comme σ_8^7 , déterminer C_l^{sz} à un facteur deux près conduit à une précision de 10 % sur la valeur de σ_8 . On note que c'est aussi l'ordre de grandeur de la précision sur σ_8 obtenue avec Planck en utilisant le spectre de puissance du CMB. Les informations issues de la mesure du spectre SZ ne semblent donc pas, à première vue, améliorer les contraintes provenant du CMB. Toutefois, il faut considérer que les dégénérescences associées aux mesures du spectre SZ ne sont pas orientées de la même façon que celles du CMB. La détermination du spectre de puissance angulaire SZ donne une contrainte sur σ_8 indépendante de Ω_m (pour $\Omega_m < 0,4$) [16]. Dans le plan Ω_m - σ_8 , la dégénérescence correspondante a donc une direction horizontale. La prise en compte de cette contrainte permet donc de réduire l'étendue des contours associés aux intervalles de confiance. On améliore ainsi la précision avec laquelle les valeurs de Ω_m et σ_8 sont déterminées.

Planck sera capable de détecter les amas de galaxies via leur signature spectrale (effet SZ). Ce catalogue de sources SZ va constituer une mine d'informations importante. La détermination du redshift des amas ouvre la possibilité de suivre l'évolution du nombre d'amas. Potentiellement, cette information permet d'obtenir des contraintes cosmologiques fortes sur Ω_m et σ_8 [26].

Il existe également une autre possibilité d'obtenir des informations sur la masse des neutrinos. En effet, les grandes structures interagissent sur le CMB via l'effet de lentille gravitationnelle. L'étude des effets de lentille gravitationnelle relatifs au CMB permet alors de sonder la distribution de matière noire.

5.3.3 Contraintes supplémentaires issues de l'effet de lentille

L'effet de lentille gravitationnelle sur le CMB correspond à la modification de la trajectoire du rayonnement issu de la couche de dernière diffusion par les grandes structures. Le rayonnement du CMB est caractérisé à l'aide des paramètres de Stockes I, U et Q. La déviation associée à l'effet de lentille gravitationnelle se caractérise formellement de la façon suivante :

$$X(\mathbf{n}) = \tilde{X}(\mathbf{n} + \mathbf{d}(\mathbf{n})) \quad (5.48)$$

où X représente I, U ou Q. Les quantités non lentillées sont surmontées d'un tilde. Le vecteur \mathbf{n} indique la direction d'observation. L'angle de déviation $\mathbf{d}(\mathbf{n})$ est lié à la projection $\phi(\mathbf{n})$ du potentiel gravitationnel $\Psi(D\mathbf{n}, D)$ le long de la ligne de visée :

$$\mathbf{d} = \nabla\phi \quad (5.49)$$

$$\phi(\mathbf{n}) = -2 \int dD \frac{D_s - D}{DD_s} \Psi(D\mathbf{n}, D) \quad (5.50)$$

où D ($= \eta_0 - \eta$) est la distance comobile le long de la ligne de visée, et D_s correspond à la distance comobile de la surface de dernière diffusion.

La déflexion due à l'effet de lentille est comparable à un processus de diffusion. L'effet de lentille gravitationnelle tend donc à effacer les motifs du CMB. Cela se traduit par un lissage des caractéristiques du spectre de puissance angulaire. La valeur de la déviation standard de l'angle de déflexion est de l'ordre de quelques minutes d'arc. Cela signifie que le spectre de puissance angulaire n'est pas altéré aux grandes échelles angulaires. Les modifications ne concernent que les petites échelles angulaires correspondant typiquement à $l > 1000$. D'autre part, l'effet de lentille

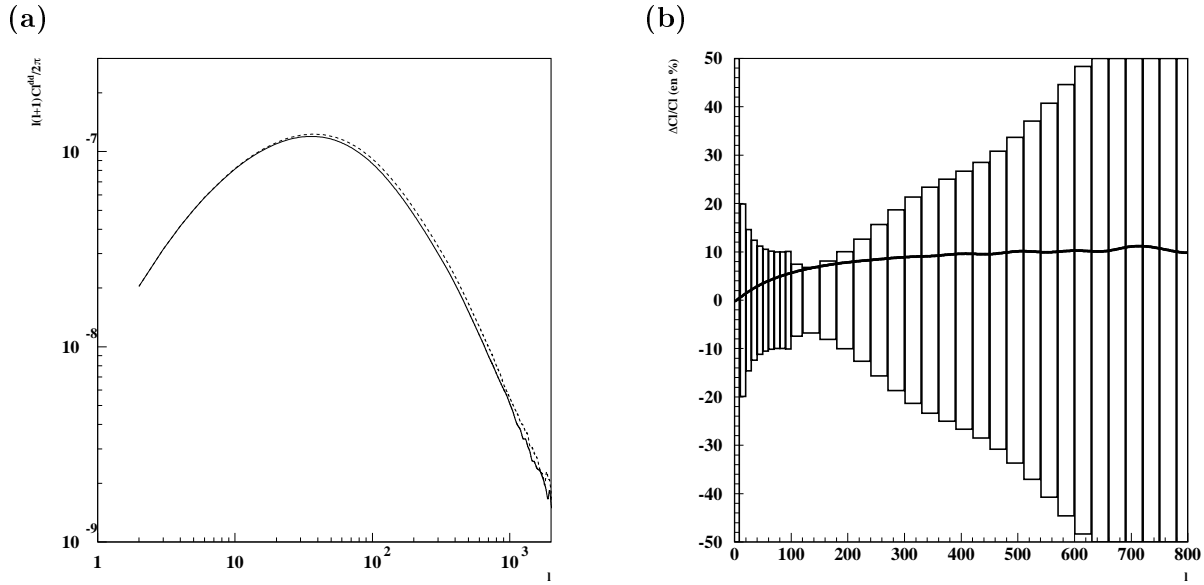


FIG. 5.8 – Ces figures montrent l'influence de la valeur de la masse totale de neutrinos sur le spectre de puissance angulaire C^{dd} de l'angle de déflexion \mathbf{d} associé à l'effet de lentille gravitationnelle. La figure de gauche montre les spectres de puissance $l(l+1)C^{dd}$ correspondant à une densité d'énergie $\Omega_\nu h^2 = 0,005$ et $\Omega_\nu h^2 = 0,0025$. Ces valeurs correspondent respectivement à 0,157 eV et 0,0785 eV par neutrinos. La figure de droite compare la différence relative entre les deux spectres avec les valeurs de l'erreur (par bande) associées à une déviation standard ($\pm 1\sigma$) attendue pour Planck.

modifie les cartes de polarisation du CMB. Cela se traduit en particulier par des conversions de modes de polarisation E en modes B.

Les modifications induites par l'effet de lentille gravitationnelle dépendent de la distribution de la matière à grande échelle. En ce sens l'effet de lentille encode des informations cosmologiques. L'effet de lentille mélange les modes sur une largeur de bande liée au spectre de puissance des angles de déflexion :

$$C_l^{dd} = l(l+1)C_l^{\phi\phi} \quad (5.51)$$

$$\langle \phi_{lm}\phi_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}C_l^{\phi\phi} \quad (5.52)$$

Les codes de Boltzmann publics CMBfast et CAMB sont capables de calculer les spectres de puissance altérés par effet de lentille, ainsi que le spectre C^{dd} des angles de déflexion.

W. Hu et T. Okamoto [21] [12] ont montré qu'il est possible de construire des estimateurs du champ de déflexion comme la somme de produits des multipôles des observables (T,E,B) du CMB (voir en annexes). La fonction de corrélation de ces estimateurs quadratiques s'écrit alors sous la forme :

$$\langle d_{lm}^a d_{l'm'}^{b*} \rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}(C_l^{dd} + N_l^{ab}) \quad (5.53)$$

où a et b désignent une des paires (TT,TE,TB,EE,EB,BB). Le terme N^{ab} représente le bruit associé aux estimateurs. Il est possible de former une combinaison d'estimateurs qui minimise ce terme de bruit. Cette combinaison d'estimateurs est appelée estimateur de variance minimum. Les formules permettant le calcul de la variance N_l^{mv} du bruit associé à cet estimateur sont

Paramètres	Contraintes avec utilisation de l'effet de lentille		
	moyenne	intervalle de confiance	précision (en %)
$\Omega_b h^2$	0,024	0,02384 - 0,02415	0,62
$\Omega_{dm} h^2$	0,1252	0,1225 - 0,1281	2,2
Θ	1,055	1,055 - 1,055	0,027
f_ν	0,04177	0,03488 - 0,04803	34
τ	0,103	0,1009 - 0,1049	4,3
n_s	0,9998	0,9961 - 1,004	0,37
$\log[10^{10} A_s]$	3,097	3,089 - 3,106	0,27
A_t/A_s	0,0962	0,04481 - 0,1477	51
H_0	69,7	67,78 - 71,66	2,8
Ω_Λ	0,6922	0,6691 - 0,7147	3,2
Age/GYr	13,43	13,33 - 13,53	0,72
Ω_m	0,3078	0,2854 - 0,3309	7,1
σ_8	0,760	0,7246 - 0,7953	4,4
$\sum m_\nu (eV)$	0,519	0,3283 - 0,7114	37

TAB. 5.5 – Cette table donne les contraintes obtenues avec Planck sur les paramètres cosmologiques à partir de données simulées et en prenant en compte l'information associée à l'effet de lentille (via le spectre de puissance de l'angle de déflexion).

données en annexe. En regroupant les valeurs du spectre dans des bandes b de largeur Δl , le niveau de bruit ΔC_l par bande est donné par :

$$\Delta C_l \simeq \sqrt{\frac{2}{(2l+1)\Delta l f_{sky}}} \left(C_b^{dd} + N_b^{mv} \right) \quad (5.54)$$

La figure 5.8 montre les spectres C^{dd} correspondant à deux masses de neutrinos différentes. Elle compare l'écart entre les deux spectres associés à ces valeurs de masse avec les barres d'erreur à 1σ attendue pour Planck sur la mesure de ce spectre de déflexion.

Nous avons réalisé des données simulées relatives au spectre de puissance de l'angle de déflexion. Nous avons attribué une erreur gaussienne pour chaque bande, le niveau de bruit étant donné par la relation 5.54. En fait, les non gaussianités induites par l'effet de lentille sont susceptibles d'augmenter l'erreur ΔC_l via la contribution du trispectre (c'est à dire de la partie non gaussienne de la fonction de corrélation à quatre points) [10]. Cependant, le calcul de la contribution du trispectre montre que son influence est négligeable jusqu'à $l \simeq 2000$ [11].

Pour étudier l'effet de l'information apportée par la prise en compte de l'effet de lentille, nous avons incorporé dans la simulation le spectre de puissance de l'angle de déflexion. La comparaison entre données simulées et spectre théorique s'effectue en utilisant une fonction de vraisemblance \mathcal{L} de la forme :

$$-2 \log \mathcal{L} = \sum_b \frac{(C_b^{dd} - C_b^{dd th})^2}{(\Delta C_b)^2} \quad (5.55)$$

L'utilisation d'un χ^2 se justifie du fait que la variance $(\Delta C_b)^2$ est dominée par le terme de bruit N_b^{mv} . Lors de la phase de construction des chaînes de Markov, nous avons ajouté le terme précédent dans l'expression de la fonction de vraisemblance, sans modifier l'expression des fonctions de vraisemblance associées aux spectres TT, TE et EE.

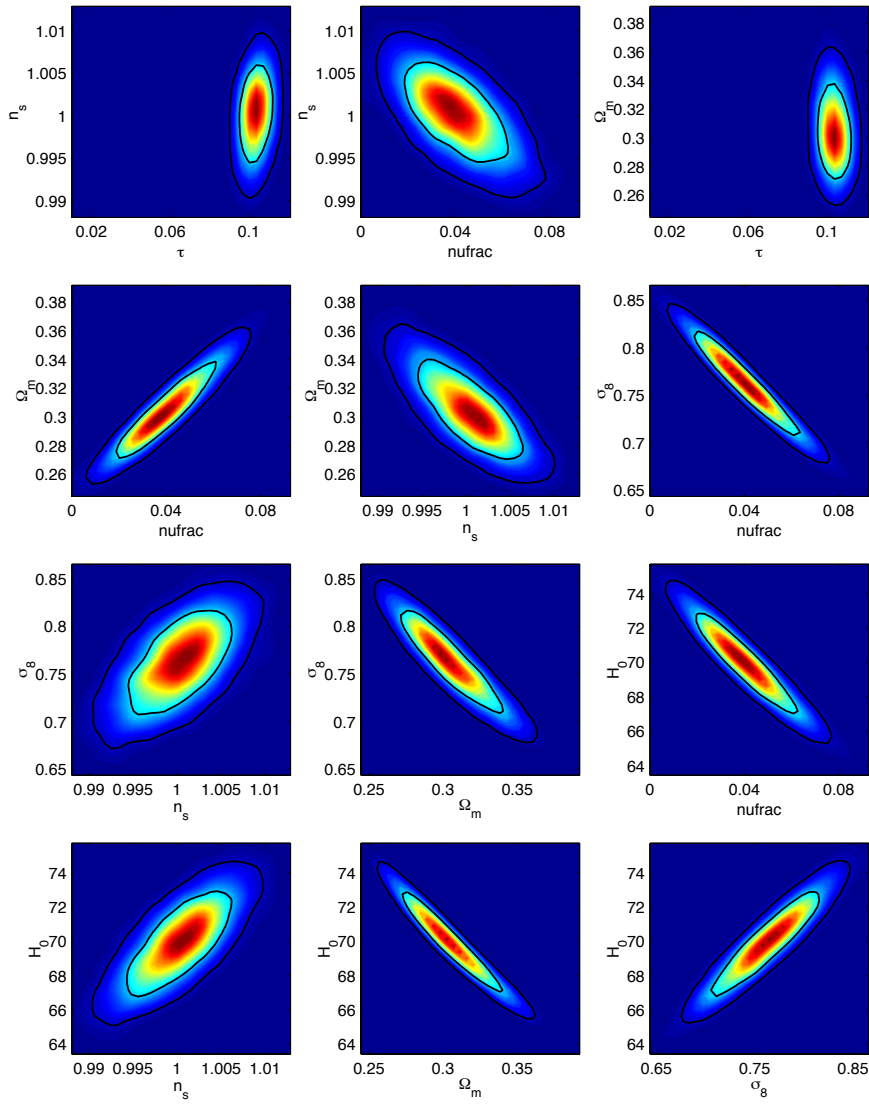


FIG. 5.9 – Les figures montrent les contraintes obtenues avec des données simulées de Planck avec effet de lentille gravitationnelle.

Les résultats obtenus par MCMC sont donnés table 5.5 et figure 5.9. Le principal effet apporté par la mesure du spectre de déflexion est d'améliorer d'un facteur deux les contraintes sur f_ν , H_0 et σ_8 par rapport à la simulation effectuée sans effet de lentille. Cela signifie que Planck est capable, en exploitant l'effet de lentille gravitationnelle, de mettre en évidence la présence de neutrinos, pour ce modèle cosmologique particulier.

Il est difficile à partir de cette seule simulation de donner précisément le niveau de sensibilité de Planck vis-à-vis de la masse des neutrinos. En prenant comme indicateur de sensibilité la déviation standard (1σ), on obtient alors un seuil de 0,19 eV pour l'ensemble de neutrinos. Cela signifie que si la masse totale des neutrinos est inférieure à 0,19 eV, Planck ne pourra alors donner qu'une limite supérieure sur $\sum m_\nu$. Cette sensibilité n'est que de 0,42 eV sans l'utilisation de l'effet de lentille gravitationnelle.

La limite que nous avons obtenue est proche de la valeur de 0,15 eV déterminée par Kaplinghat

et al. [14] qui considèrent le cas d'un neutrino massif et de deux neutrinos non massifs. Cette dernière remarque nous amène à nous demander dans quelle mesure Planck est sensible à la hiérarchie de masse des neutrinos.

5.3.4 Hiérarchie de masse

Dans quelle mesure est-il possible à partir des données CMB de contraindre la hiérarchie de masse des neutrinos? Voyons comment nous pouvons donner un élément de réponse avec les outils numériques actuellement disponibles.

Nous envisageons le cas où la hiérarchie de masse est cette fois non dégénérée, avec 2 neutrinos non massifs et 1 neutrino massif. Nous allons, à partir du jeu de données simulées précédent, déterminer les paramètres cosmologiques avec l'analyse MCMC. On compare donc les données simulées, réalisées avec un spectre de masse dégénéré, avec des modèles correspondant à 2 neutrinos non massifs et 1 neutrino massif.

Les résultats issus de cette analyse sont donnés figure 5.10 et table 5.3.4. On observe que les contraintes obtenues sont différentes de celles correspondant à l'estimation avec des masses de neutrinos dégénérées. En particulier, pour certains paramètres, la valeur obtenue peut varier de l'ordre d'une déviation standard. C'est par exemple le cas des paramètres n_s et H_0 . On note également que la forme des contours associés aux intervalles de confiance à 68% et à 95% sont modifiés de façon importante par rapport aux résultats obtenus avec la hiérarchie dégénérée.

On note d'autre part que la qualité de l'ajustement effectué est faiblement sensible à la hiérarchie. Le χ^2 effectif, défini comme $\chi^2 = -2 \ln \mathcal{L}$, est plus élevé pour le meilleur fit obtenu avec les modèles avec spectre non dégénéré. La différence entre les valeurs de χ^2 , prises au maximum de vraisemblance pour chacun des modèles, est $\Delta\chi^2 = 3,6$. Ainsi, utiliser des modèles avec une hiérarchie de masse différente de celle des données a augmenté la valeur du χ^2 (du meilleur fit)

Paramètres	Contraintes avec hiérarchie de masse différente			
	moyenne	intervalle de confiance (68%)	intervalle de confiance (95 %)	entrée
$\Omega_b h^2$	0,02397	0,02382 - 0,02411	0,02368 - 0,02427	0,024
$\Omega_{dm} h^2$	0,1233	0,1214 - 0,1250	0,1192 - 0,1283	0,12
Θ	1,055	1,055 - 1,055	1,055 - 1,055	1,055
f_ν	0,03076	0,02626 - 0,03324	0,01418 - 0,05498	0,04
τ	0,1016	0,09944 - 0,1036	0,09457 - 0,1093	0,10
n_s	0,9951	0,9912 - 0,9990	0,9860 - 1,003	1,0
$\log[10^{10} A_s]$	3,092	3,084 - 3,101	3,077 - 3,109	3,091
A_t/A_s	0,08697	0,03890 - 0,1349	0,01548-0,1886	0,1
H_0	71,14	70,09 - 72,32	67,96 - 73,76	70
Ω_Λ	0,7086	0,6970 - 0,7219	0,6709 - 0,7364	0,6959
$Age(GYr)$	13,36	13,30 - 13,41	13,24 - 13,51	13,41
Ω_m	0,2914	0,2781 - 0,3030	0,2636 - 0,3291	0,3041
σ_8	0,7793	0,7623 - 0,8021	0,749 - 0,8283	0,7619

TAB. 5.6 – Cette table donne les contraintes obtenues avec Planck sur les paramètres cosmologiques à partir de données simulées. Les données ont été simulées à partir d'un modèle avec masses de neutrinos dégénérées. La détermination des paramètres a été effectuée avec des modèles à un neutrino massif et deux neutrinos non massifs.

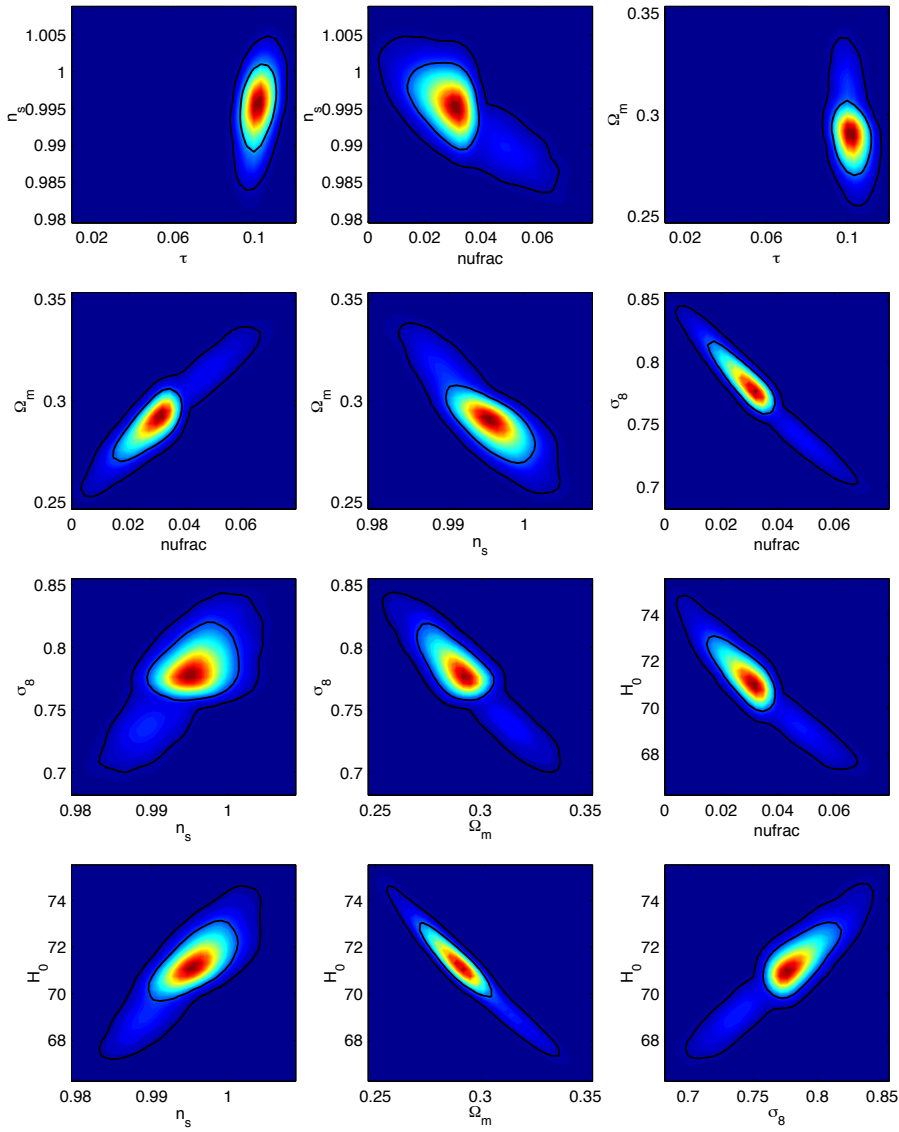


FIG. 5.10 – Les figures montrent les contraintes obtenues avec des données simulées de Planck avec effet de lentille gravitationnelle. Le données simulées correspondent à un modèle avec une hiérarchie de masse de neutrinos dégénérée. L’ajustement est effectué en utilisant des modèles avec un neutrino massif et deux neutrinos non massifs.

de 3,6 unités. Cette différence $\Delta\chi^2$ correspond à un effet perceptible, mais inférieur à 2σ . En ce sens, l’influence de la hiérarchie de masse des neutrinos est faible.

Cette analyse met en évidence deux aspects de l’influence de la hiérarchie de masse sur la détermination des paramètres cosmologiques. On observe que la qualité de l’ajustement effectué avec un modèle non dégénéré n’est que très faiblement dégradée par rapport à un ajustement effectué avec la “bonne” hiérarchie (c’est à dire celle des données simulées, ici 3 familles de neutrinos de 0,15 eV chacune). Néanmoins, on note que la forme et la position des contours associés aux intervalles de confiance varie sensiblement suivant la hiérarchie. De ce point de vue,

le type de hiérarchie de masse influence la détermination des autres paramètres cosmologiques.

L'analyse que nous avons effectuée est assez grossière et ne constitue qu'une première étape. Elle indique cependant la nécessité de pouvoir paramétrer la hiérarchie de masse des neutrinos dans les codes de Boltzmann. Cette possibilité n'est pas encore accessible dans les codes mis à la disposition de la communauté.

5.4 Conclusion

Nous avons produit des données CMB simulées en utilisant les caractéristiques de la mission Planck. Nous avons ensuite recherché des approximations non biaisées des fonctions de vraisemblance, qui sont les outils qui permettent de comparer les données expérimentales aux modèles théoriques. En utilisant les programmes disponibles au sein de la communauté, nous avons établi à partir de ces données les contraintes sur les paramètres cosmologiques.

La qualité des contraintes obtenues dépend du choix du modèle cosmologique utilisé, c'est à dire de la nature et du nombre de paramètres. On note en particulier que la masse des neutrinos est peu contrainte par les spectres de puissance angulaire et la présence de dégénérescences entre la masse des neutrinos et d'autres paramètres comme H_0 et σ_8 . Les contraintes sur ces derniers paramètres sont de fait dégradées par le degré de liberté associé à la masse des neutrinos.

Toutefois, la prise en compte de l'effet de lentille gravitationnelle, et en particulier la mesure du spectre de puissance angulaire de l'angle de déflexion, permet avec les données de Planck d'améliorer significativement la sensibilité de l'expérience à la masse des neutrinos. Planck est susceptible de détecter les effets induits par des neutrinos dont la masse totale est supérieure à un seuil de l'ordre de 0,2 eV.

Pour finir, nous avons étudié un premier aspect de la possibilité de poser des contraintes sur le spectre de masse des neutrinos avec les données de Planck. Cette étude préliminaire plaide pour la possibilité de paramétrer le spectre de masse des neutrinos dans les codes de Boltzmann.

Bibliographie

- [1] J. R. Bond, A. H. Jaffe and L. Knox, Phys. Rev. D 57 (1998), 2117.
- [2] S. Bargout, Thèse de Doctorat, 2004
- [3] N. Christensen, R. Meyer, Phys.Rev. D64 (2001) 022001
- [4] N. Christensen, R. Meyer, L. Knox, B. Luey, Class. Quant. Grav. 18 (2001) 2677
- [5] M. Doran, CMBEASY : an Object Oriented Code for the Cosmic Microwave Background, astro-ph/0302138
- [6] <http://www.cmbeasy.org/>
- [7] M. Douspis, Thèse de Doctorat, 2002
- [8] D. J. Eisenstein, W. Hu and M. Tegmark, Astro. J. 518 2 (1999)
- [9] G. Hinshaw *et al.* , Astro. J. (2003)
- [10] W. Hu, Phys. Rev. D. 62 043007 (2000)
- [11] W. Hu, Phys. Rev. D. 64 083005 (2001)
- [12] W. Hu, T. Okamoto, Astro. J. 574 566 (2002)
- [13] M. Kamionkowski, A. Kosowsky and A. Stebbins, Phys.Rev. D55 (1997) 7368-7388
- [14] M. Kaplinghat, L. Knox and Y.-S. Song, Phys.Rev.Lett. 91 (2003)
- [15] R.E. Kass, B.P. Carlin, A. Gelman and R.M. Neal, Journal of the American Statistical Association, 1998, Vol. 52, No 2, 93-100.
- [16] E. Komatsu, U. Seljak, Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 1-16 (2002)
- [17] A. Kosowsky, M. Milosavljevic and R. Jimenez, Phys.Rev. D66 (2002) 063007
- [18] A. Lewis, S. Bridle, Phys. Rev. D66 (2002) 103511
- [19] A. Lewis, A. Challinor and A. Lasenby, Astro. J. 538 (2000) 473-476
- [20] <http://cosmologist.info/cosmomc/>
- [21] T. Okamoto, W. Hu, Phys. Rev. D 67 083002 (2003)
- [22] A.E. Raftery, S.M. Lewis, Bayesian Statistics 4 (J.M. Bernardo *et al.* , editors), Oxford University Press, 763-77
- [23] A. Slosar, U. Seljak and A. Makarov, Phys. Rev. D (to be published), astro-ph/0403073
- [24] D. Spergel *et al.* , Astro. J. (2003)
- [25] L. Verde *et al.* , Astro. J. (2003)
- [26] J. Weller, R. Battye and R. Kneissl, Phys.Rev.Lett. 88 (2002) 231301

Conclusion

Ce travail de thèse porte sur quelques aspects de l'étude expérimentale des anisotropies du CMB. Il a été effectué dans le cadre de la collaboration Archeops.

Je présente dans un premier temps le cadre théorique, appelé modèle du Big Bang, dans lequel ce travail s'inscrit. Je décris également le mécanisme inflationnaire de formation des structures à grande échelle observées aujourd'hui. Je précise aussi les liens entre la physique des anisotropies du CMB avec les différents paramètres cosmologiques.

Dans la deuxième partie, je donne les caractéristiques de l'expérience Archeops. Les résultats scientifiques d'Archeops portant d'une part sur les contraintes relatives aux paramètres cosmologiques et d'autre part sur la physique galactique sont rappelés.

Les chapitres trois et quatre sont consacrés au travail que j'ai effectué au sein de la collaboration Archeops. La première partie de ce travail concerne la reconstruction du pointage des instruments de mesure. La détermination du pointage est une étape clé du processus de traitement des données du fait que cette opération se situe en amont de la chaîne d'analyse. Archeops dispose d'un instrument spécifique, le senseur stellaire, pour permettre la reconstruction du pointage. Je décris de quelle façon les données du senseur stellaire sont utilisées pour déterminer le pointage. Je présente également l'algorithme développé afin d'assurer une reconstruction optimale. On établit que l'erreur de pointage est de l'ordre de $2'$ (1 sigma). Cette valeur, bien inférieure à la taille du lobe instrumental (de l'ordre de $10'$), assure que l'erreur de pointage n'induit pas d'effets importants sur la reconstruction des cartes du ciel.

La deuxième phase de mon travail a consisté à développer des algorithmes nouveaux utilisés dans l'analyse des données. Ces algorithmes, dit de destriage, permettent de retirer des données les dérives basses fréquences. La présence de ces dérives gêne la construction des cartes du ciel, dont la réalisation est l'un des enjeux majeurs d'Archeops. Je présente notamment deux nouveaux algorithmes. Le premier, particulièrement bien adapté aux stratégies de balayage en cercle, est basé sur la comparaison de la variance du signal dans les directions parallèles et transverses au balayage. Cet algorithme a été intégré dans la chaîne de traitement de données d'Archeops.

Le deuxième algorithme de destriage original développé dans cette thèse repose sur l'utilisation d'une base d'ondelettes pour caractériser les dérives. Les ondelettes sont particulièrement bien adaptées au sens où elles forment une base de Karhunen-Loève pour le bruit $1/f$. La matrice de corrélation du bruit est alors diagonale dans la base d'ondelettes. L'utilisation de cette propriété évite la manipulation de matrices de grande taille, ce qui permet la mise en œuvre d'algorithmes rapides.

La dernière partie de ce travail porte sur la nature des contraintes sur les paramètres cosmologiques que Planck pourra obtenir. Je discute en particulier du choix des fonctions de vraisemblance. En pratique les fonctions de vraisemblance permettent de comparer les données ex-

périmentales (spectres de puissance angulaires mesurés) aux modèles théoriques (spectres de puissance angulaires associés à un modèle d'Univers et déterminés à l'aide d'un code de Boltzmann). Je présente ensuite le principe des algorithmes de type MCMC (Monte Carlo Markov Chain) utilisés pour établir les contraintes sur les paramètres cosmologiques. Puis, je recherche le type de contraintes que Planck est susceptible d'imposer sur les paramètres cosmologiques et en particulier sur la masse des neutrinos. On montre que les contraintes attendues sur la masse des neutrinos sont assez lâches du fait de la faible dépendance de la forme des spectres de puissance angulaires vis à vis de la masse des neutrinos. De plus, le degré de liberté associé à la masse des neutrinos induit des dégénérescences entre paramètres cosmologiques, ce qui dégrade en particulier les contraintes sur la constante de Hubble H_0 . Cependant, la prise en compte de l'information encodée dans l'effet de lentille gravitationnelle permet d'améliorer significativement la qualité des contraintes. L'effet de lentille gravitationnelle correspond à la déflexion des photons du CMB issus de la couche de dernière diffusion par les grandes structures. Si la dynamique des anisotropies du CMB est peu sensible à la masse des neutrinos, il en est autrement pour le processus de formation des grandes structures. L'effet de lentille est lié à la dynamique de formation des structures, et est alors de ce fait sensible à l'influence de la masse des neutrinos. On montre en particulier que, dans le cas où le spectre de masse des neutrinos est dégénéré, Planck peut mettre en évidence l'influence de neutrinos dont la masse est supérieure à 0,065 eV (1 neutrino).

Dans un deuxième temps, on a étudié l'impact du spectre de masse des neutrinos sur la détermination des paramètres cosmologiques. On montre en particulier que les contraintes obtenues avec des modèles avec un seul neutrino massif (et deux non massifs) à partir d'une simulation correspondant à un spectre dégénéré sont susceptibles d'être différentes de celles obtenues avec l'utilisation de modèles avec masses de neutrinos dégénérées. De ce point de vue, Planck est sensible à la hiérarchie de masse des neutrinos.

Ce dernier point indique que l'analyse des données de Planck nécessitera de pouvoir paramétrer la hiérarchie de masse des neutrinos dans les codes de Boltzmann. Cette fonctionnalité n'est cependant pas encore disponible dans les versions publiques des programmes utilisés par la communauté.

Annexe A

Compléments sur les perturbations cosmologiques

Expression de ζ

On veut montrer que la quantité ζ correspondant à

$$\zeta = \frac{\delta a}{a} + \Phi \quad (\text{A.1})$$

peut s'écrire comme :

$$\zeta = \Phi + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi}{1 + \omega} \quad (\text{A.2})$$

On doit pour cela utiliser la condition de roulement lent 1.74 sous une autre forme :

$$\epsilon = 4\pi G \frac{\phi'}{\mathcal{H}^2} \quad (\text{A.3})$$

On peut alors réécrire $\frac{\delta a}{a}$ sous la forme :

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{\mathcal{H}}{\phi'} \delta\phi = 4\pi G \phi' \frac{\delta\phi}{\epsilon \mathcal{H}} \quad (\text{A.4})$$

D'autre part, la dynamique de $\delta\phi$ est donnée par les équations d'Einstein perturbées. On obtient à partir de ces dernières [10](du chapitre 1) :

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi G \phi' \delta\phi \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant l'expression de $\delta\phi$ dans A.4, on arrive à :

$$\zeta = \Phi + \frac{\Phi' + \mathcal{H}\Phi}{\epsilon \mathcal{H}} \quad (\text{A.6})$$

En utilisant 1.67, 1.68 et 1.74, on montre que :

$$\frac{p}{\rho} = -1 + \frac{2}{3}\epsilon = \omega \quad (\text{A.7})$$

D'où finalement,

$$\zeta = \Phi + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{H}^{-1}\Phi' + \Phi}{1 + \omega} \quad (\text{A.8})$$

Dynamique des perturbations

On donne ici les équations de la dynamique des perturbations. Elle s'obtiennent en linéarisant les équations d'Einstein perturbées. On obtient, pour la partie non perturbée, l'analogue des équations 1.5 et 1.6 en utilisant le temps conforme η (pour un espace plat) :

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}Ga^2\bar{\rho} \quad (\text{A.9})$$

$$2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 = -8\pi Ga^2\bar{p} \quad (\text{A.10})$$

où la dérivation par rapport au temps conforme η est notée $\frac{da}{d\eta} = a'$.

Pour la partie perturbée, on a, en se plaçant dans l'espace de Fourier comobile [21] :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' - \frac{a'}{a}\Psi\right) = 4\pi Ga^2\delta\rho \quad (\text{A.11})$$

$$k^2\left(-\Phi' + \frac{a'}{a}\Psi\right) = 4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})\theta \quad (\text{A.12})$$

$$\Phi'' + \frac{a'}{a}(2\Phi' - \Psi') - \left(2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2\right)\Psi + \frac{k^2}{3}(\Phi + \Psi) = -4\pi Ga^2\delta p \quad (\text{A.13})$$

$$-k^2(\Phi + \Psi) = 12\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})\sigma \quad (\text{A.14})$$

Annexe B

Senseur Stellaire

On note G le repère géocentrique G et L le repère lié à la nacelle. La matrice \mathcal{R}_{LG} permet de passer d'un repère à l'autre :

$$\mathcal{R}_{LG} = \begin{bmatrix} -\sin \delta_p \cos \alpha_p & \sin \alpha_p & \cos \delta_p \cos \alpha_p \\ -\sin \delta_p \sin \alpha_p & -\cos \alpha_p & \cos \delta_p \sin \alpha_p \\ \cos \delta_p & 0 & \sin \delta_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La transformation dans le sens $G \rightarrow L$ s'effectue à l'aide de la matrice $\mathcal{R}_{GL} = \mathcal{R}_{LG}^T$.

Le vecteur \mathbf{u} désigne la direction d'un objet de la voûte céleste. En exprimant les coordonnées de \mathbf{u} dans le repère géocentrique et dans le repère lié à la nacelle, puis en utilisant la matrice de transformation B.1, on obtient :

$$\begin{cases} \sin \theta \cos \varphi = -\cos \delta \cos \alpha \sin \delta_p \cos \alpha_p - \cos \delta \sin \alpha \sin \delta_p \sin \alpha_p + \sin \delta \cos \delta_p \\ \sin \theta \sin \varphi = \cos \delta \cos \alpha \sin \alpha_p - \cos \delta \sin \alpha \cos \alpha_p \\ \cos \theta = \cos \delta \cos \alpha \cos \delta_p \cos \alpha_p + \cos \delta \sin \alpha \cos \delta_p \sin \alpha_p + \sin \delta \sin \delta_p \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

A partir des relations B.2, on peut établir l'effet d'une modification de la direction de l'axe de rotation $\Delta \delta_p, \Delta \alpha_p$ sur les coordonnées θ et φ d'une étoile dans le repère lié à la nacelle. On obtient au premier ordre, après un petit peu d'algèbre :

$$\begin{cases} \Delta \theta = \sin \varphi \cos \delta_p \Delta \alpha_p - \cos \varphi \Delta \delta_p \\ \Delta \varphi = (-\sin \delta_p + \cot \theta \cos \delta_p \cos \varphi) \Delta \alpha_p + \cot \theta \sin \varphi \Delta \delta_p \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha_p \\ \Delta \delta_p \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

avec

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \alpha_p & -\cos \varphi \\ -\sin \delta_p + \cot \theta \cos \delta_p \cos \varphi & \cot \theta \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ces relations permettent de faire le lien entre la grandeur mesurée par le senseur stellaire (θ) et les variables décrivant le pointage. Elles sont utilisées pour effectuer l'ajustement de la trajectoire de la nacelle.

Annexe C

Covariance des estimateurs du spectre de puissance angulaire

Couverture complète du ciel

On cherche à estimer la matrice de covariance des estimateurs $\hat{C}_l^{XX'}$ du spectre de puissance angulaire :

$$\begin{aligned} COV(\hat{C}_l^A \hat{C}_l^{A'}) &= \langle (\hat{C}_l^A - C_l^A) (\hat{C}_l^{A'} - C_l^{A'}) \rangle \\ &= \left(\langle \hat{D}_l^A \hat{D}_l^{A'} \rangle - D_l^A D_l^{A'} \right) B_{Al}^{-2} \end{aligned} \quad (C.1)$$

avec $A = XX'$. On peut constater que cette dernière se détermine à partir des propriétés des estimateurs $D_l^{XX'}$. On aboutit alors (voir la référence [13] du chapitre 5) pour les termes diagonaux de la matrice de covariance à :

$$COV(\hat{C}_l^{T2}) = \frac{2}{2l+1} (C_l^T + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2})^2 \quad (C.2)$$

$$COV(\hat{C}_l^{E2}) = \frac{2}{2l+1} (C_l^E + \omega_P^{-1} B_{Pl}^{-2})^2 \quad (C.3)$$

$$COV(\hat{C}_l^{B2}) = \frac{2}{2l+1} (C_l^B + \omega_P^{-1} B_{Pl}^{-2})^2 \quad (C.4)$$

$$COV(\hat{C}_l^{TE2}) = \frac{1}{2l+1} (C_l^{TE2} + (\hat{C}_l^T + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2})(C_l^E + \omega_P^{-1} B_{Pl}^{-2})) \quad (C.5)$$

et pour la partie hors diagonale :

$$COV(\hat{C}_l^T \hat{C}_l^E) = \frac{2}{2l+1} C_l^{TE2} \quad (C.6)$$

$$COV(\hat{C}_l^T \hat{C}_l^{TE}) = \frac{2}{2l+1} C_l^{TE} (\hat{C}_l^T + \omega_T^{-1} B_{Tl}^{-2}) \quad (C.7)$$

$$COV(\hat{C}_l^E \hat{C}_l^{TE}) = \frac{2}{2l+1} C_l^{TE} (C_l^E + \omega_P^{-1} B_{Pl}^{-2}) \quad (C.8)$$

La présence des avant-plans conduit à ne pas prendre en compte la totalité du ciel. Les coupures sont effectuées en appliquant un masque \mathbf{M} sur la carte de sorte que M_i vaut 0 si le pixel i n'est pas utilisé et 1 sinon. Le développement en harmoniques sphériques du signal s'écrit alors :

$$\tilde{a}_{lm}^T = \int d\mathbf{n} \Delta(\mathbf{n}) M(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) \quad (C.9)$$

L'estimateur $\tilde{C}_l^T = 1/(2l+1) \sum_m |\tilde{a}_{lm}^T|^2$, appelé pseudo-spectre, ne correspond pas au spectre de puissance. La matrice de covariance ne s'obtient plus alors aussi directement.

Couverture partielle du ciel

Nous indiquons le principe de la méthode permettant d'obtenir la matrice de covariance du spectre de puissance dans le cas d'une couverture incomplète du ciel. On ne considère ici que le cas du spectre TT.

On a vu que les fluctuations de température sont gaussiennes. Elles suivent donc une loi du type :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{D}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{\Delta}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Delta}\right) \quad (\text{C.10})$$

où $\mathbf{\Delta}$ représente la carte du ciel. La matrice de covariance $\mathbf{D} = \langle \mathbf{\Delta} \mathbf{\Delta}^T \rangle$ se décompose comme la somme des contributions du signal et du bruit, $\mathbf{D} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$, avec :

$$\mathbf{S}_{ij} = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l B_l^2 P_l(\cos(\theta_{ij})) \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_{ij} = \delta_{ij} \sigma_i, \quad (\text{C.11})$$

θ_{ij} étant l'écart angulaire entre les pixels i et j . Le spectre de puissance angulaire est obtenu en maximisant la vraisemblance.

La matrice de covariance du signal est diagonale dans l'espace harmonique dans le cas où la couverture du ciel est complète. La matrice de covariance du bruit est diagonale dans l'espace réel, mais ne l'est pas dans l'espace harmonique. C'est pourquoi l'inversion de la matrice \mathbf{D} est délicate. Cependant, dans le cas où le bruit est uniforme, on a $\mathbf{N}_{ij} = \delta_{ij} \sigma$. La matrice de bruit est alors également diagonale dans l'espace harmonique. En effet, on a ²³ :

$$\langle n_{lm} n_{l'm'}^* \rangle = \theta_p^4 \sum_{ij} Y_{lm}(p_i) Y_{l'm'}^*(p_j) \langle n_i n_j^* \rangle \quad (\text{C.12})$$

$$= \theta_p^4 \sum_{ij} Y_{lm}(p_i) Y_{l'm'}^*(p_j) \delta_{ij} \sigma^2 \quad (\text{C.13})$$

$$= \theta_p^2 \sigma^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{C.14})$$

L'inversion de \mathbf{D} s'effectue alors facilement dans l'espace harmonique.

La présence des avant-plans conduit à ne pas prendre en compte la totalité du ciel. Les coupures sont effectuées en appliquant un masque \mathbf{M} sur la carte de sorte que M_i vaut 0 si le pixel i n'est pas utilisé et 1 sinon. Le masque modifie la matrice de covariance de sorte que :

$$\mathbf{D}^{-1} \rightarrow \mathbf{M} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \quad (\text{C.15})$$

La matrice de Fisher $F_{ll'}$ s'écrit alors :

$$F_{ll'} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial C_l \partial C_{l'}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P}_l \mathbf{M} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P}_{l'}) \quad (\text{C.16})$$

avec

$$\mathbf{P}_l = \partial \mathbf{D} / \partial C_l, \quad (\text{C.17})$$

²³ On utilise la correspondance $\int d\mathbf{n} f(\mathbf{n}) \leftrightarrow \sum_i \frac{4\pi}{N_{pix}} f(p_i)$, où p_i est la direction du pixel i . L'angle solide sous-tendu par un pixel correspond à $\theta_p^2 = 4\pi/N_{pix}$. On a en particulier : $\sum_i Y_{lm}(p_i) Y_{l'm'}^*(p_i) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \theta_p^{-2}$

et

$$(\mathbf{P}_l)_{ij} = (2l+1)/(4\pi) B_l^2 P_l(\cos(\theta_{ij})) = B_l^2 \sum_m Y_{lm}(i) Y_{lm}^*(j) \quad (\text{C.18})$$

en utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques. On a alors :

$$F_{ll'} = \frac{1}{2} B_l^2 B_{l'}^2 \sum_{mm'} \sum_{ij} M_i M_j D_{ij}^{-1} \sum_{kp} Y_{lm}^*(p_j) Y_{lm}(p_k) M_k D_{kp}^{-1} M_p Y_{l'm'}^*(p_p) Y_{l'm'}(p_i) \quad (\text{C.19})$$

La matrice \mathbf{D} étant diagonale dans l'espace harmonique, on a :

$$D_{ij}^{-1} = \theta_p^4 \sum_{lm} \frac{1}{D_l} Y_{lm}^*(p_j) Y_{lm}(p_k) \quad (\text{C.20})$$

$$= \theta_p^4 \sum_{lm} \frac{1}{C_l B_l^2 + \omega^{-1}} Y_{lm}^*(p_i) Y_{lm}(p_j) \quad (\text{C.21})$$

où on a posé $\omega^{-1} = \theta_p^2 \sigma^2$. On obtient alors :

$$F_{ll'} = \frac{1}{2} \theta_p^4 \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} \frac{B_{l_1}^2}{C_{l_1} B_{l_1}^2 + \omega^{-1}} \frac{B_{l_2}^2}{C_{l_2} B_{l_2}^2 + \omega^{-1}} \sum_{mm'} \sum_{ij} \sum_{pk} M_i M_j Y_{l_1 m_1}^*(p_i) Y_{l_1 m_1}(p_j) Y_{l_2 m_2}^*(p_j) Y_{l_2 m_2}(p_k) M_k Y_{l_2 m_2}^*(p_k) Y_{l_2 m_2}(p_p) M_p Y_{l' m'}^*(p_p) Y_{l' m'}(p_i) \quad (\text{C.22})$$

En utilisant le fait que la somme $\sum_i M_i Y_{l_1 m_1}^*(p_i) Y_{l' m'}(p_i)$ est essentiellement non nulle pour $|l_1 - l'| < l'$, on obtient [9] (chapitre 5) :

$$F_{ll'} \simeq \frac{1}{2} \theta_p^4 \frac{1}{C_l + B_l^{-2} \omega^{-1}} \frac{1}{C_{l'} + B_{l'}^{-2} \omega^{-1}} \sum_{mm'} \sum_{ij} M_i Y_{lm}^*(p_i) Y_{lm}(p_j) M_j Y_{l' m'}^*(p_j) Y_{l' m'}(p_i) \quad (\text{C.23})$$

En développant le masque sur la base des harmoniques sphériques, on obtient :

$$F_{ll'} \simeq \frac{1}{2} \theta_p^4 \frac{1}{C_l + B_l^{-2} \omega^{-1}} \frac{1}{C_{l'} + B_{l'}^{-2} \omega^{-1}} \sum_{mm'} \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} m_{l_1 m_1} m_{l_2 m_2} \sum_{ij} Y_{l_1 m_1}(p_i) Y_{l_2 m_2}(p_j) Y_{lm}^*(p_i) Y_{lm}(p_j) Y_{l' m'}^*(p_j) Y_{l' m'}(p_i) \quad (\text{C.24})$$

Dans cette expression, la somme $\sum_i Y_{l_1 m_1}(p_i) Y_{lm}^*(p_i) Y_{l' m'}(p_i)$ (ainsi que la sommation sur j) s'évalue en utilisant les symboles 3-j de Wigner :

$$\int d\Omega Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{l' m'}(\mathbf{n}) = (-1)^{m_2} \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l & l' \\ m_1 - m & m' \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

En utilisant les propriétés suivantes des symboles 3-j :

$$\begin{pmatrix} l & l_2 & l' \\ m & m_2 & -m' \end{pmatrix} = (-1)^{l+l_2+l'} \begin{pmatrix} l & l' & l_2 \\ m & -m' & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.26})$$

et

$$\begin{pmatrix} l & l' & l_2 \\ -m & -m' & -m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{l+l_2+l'} \begin{pmatrix} l & l' & l_2 \\ m & m' & m_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.27})$$

puis en changeant les notations $m_2, m' \rightarrow -m_2, -m'$ et en utilisant la relation d'orthogonalité des symboles 3-j :

$$\sum_{mm'} \begin{pmatrix} l & l' & l_1 \\ m & m' & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l' & l_2 \\ m & m' & m_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2l_1 + 1} \delta_{m_1 m_2} \delta_{l_1 l_2} \quad (\text{C.28})$$

on finit par obtenir [9] (chapitre 5) :

$$F_{ll'} \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{C_l + B_l^{-2} \omega^{-1}} \frac{1}{C_{l'} + B_{l'}^{-2} \omega^{-1}} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi} \sum_{l''} M_{l''} \begin{pmatrix} l & l' & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (\text{C.29})$$

où $M_l = \sum_{m_1} |m_{lm_1}|^2$.

Afin d'obtenir une expression simplifiée des éléments diagonaux, on note que :

$$\begin{pmatrix} l & l & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \ll \begin{pmatrix} l & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2l+1} \text{ avec } l' > 0 \quad (\text{C.30})$$

Les éléments diagonaux ont alors pour expression approchée :

$$F_{ll} \simeq \frac{2l+1}{2} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(C_l + B_l^{-2} \omega^{-1})^2} M_0 \quad (\text{C.31})$$

$$\simeq \frac{(2l+1)f}{2} \frac{1}{(C_l + B_l^{-2} \omega^{-1})^2} \quad (\text{C.32})$$

où on a utilisé le fait que le monopôle est lié à la valeur moyenne, $M_0 = |m_{00}|^2 = 4\pi f$, f étant la portion de ciel utilisé. L'utilisation partielle du ciel, $f < 1$, augmente donc la variance de l'estimateur des mesures \hat{C}^T de sorte que :

$$VAR(\hat{C}_l^T) = \frac{2}{(2l+1)f} (C_l + B_l^{-2} \omega^{-1})^2 \quad (\text{C.33})$$

Annexe D

Fonction de vraisemblance

Approximation non biaisée de la fonction de vraisemblance

On considère le spectre de puissance angulaire C^T . On a vu que les estimateurs \hat{C}_l^T suivent une loi de χ^2 à $2l + 1$ degrés de liberté. On a alors pour un multipôle :

$$-2 \ln \mathcal{L}(\hat{C}_l^T | C_l^T) = (2l + 1) \left(\ln \left(\frac{C_l^T}{\hat{C}_l^T} \right) + \frac{\hat{C}_l^T}{C_l^T} \right) + \text{termes sans } C_l^T \quad (\text{D.1})$$

Le fonction de vraisemblance est maximum pour $C_{max\ l}^T = \hat{C}_l^T$. Le développement de la fonction de vraisemblance autour de son maximum, $C_l^T = \hat{C}_l^T(1 + \epsilon)$, conduit à :

$$-2 \ln \mathcal{L}(\hat{C}_l^T | C_l^T) = (2l + 1) \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{2}{3} \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) \quad (\text{D.2})$$

Les développements des approximations gaussienne et lognormale autour de $C_{max\ l}^T$ s'écrivent :

$$-2 \ln \mathcal{L}_{Gauss}(\hat{C}_l^T | C_l^T) = (2l + 1) \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 - \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) \quad (\text{D.3})$$

et

$$-2 \ln \mathcal{L}_{Logn}(\hat{C}_l^T | C_l^T) = (2l + 1) \left(\frac{1}{2} \epsilon^2 - \frac{1}{2} \epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \right) \quad (\text{D.4})$$

Le développement D.3 met en évidence le fait que l'approximation gaussienne de la fonction de vraisemblance n'est pas une fonction gaussienne de C_l^T . La fonction de vraisemblance correspondant à

$$\ln \mathcal{L}_{wmap} = \frac{1}{3} \ln \mathcal{L}_{Gauss} + \frac{2}{3} \ln \mathcal{L}_{Logn} \quad (\text{D.5})$$

coïncide jusqu'au troisième ordre à la fonction de vraisemblance exacte de \hat{C}_l^T .

Annexe E

Effet de lentille gravitationnelle

Nous donnons dans cette section les principaux résultats liés à l'impact de l'effet de lentille gravitationnelle sur le CMB. Ces résultats ont été publiés par [10] et [21] (références du chapitre 5).

Les multipôles X_{lm} font référence aux quantités mesurées et donc altérées par l'effet de lentille gravitationnelle. On note \tilde{X}_{lm} les quantités que l'on observerait sans effet de lentille. En pratique, il est possible de déterminer numériquement les spectres de puissance des grandeurs lentillées $\tilde{C}_l^{XX'}$ à partir des grandeurs non lentillées et du spectre de puissance du potentiel défecteur $C_l^{\phi\phi}$. L'effet de lentille mélange les différents multipôles et induit des corrélations entre les modes.

Du point de vue expérimental, il est possible de construire un estimateur du champ de déflexion comme une somme de paires de multipôles observées :

$$d_{LM}^\alpha = \frac{A^\alpha}{\sqrt{L(L+1)}} \sum_{l_1 m_1} \sum_{l_2 m_2} (-1)^M \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} g_{l_1 l_2}^\alpha(L) a_{l_1 m_1} b_{l_2 m_2} \quad (\text{E.1})$$

où $\alpha = ab \in \{\text{TT, EE, TE, TB, EB, BB}\}$. L'amplitude A^α correspond à :

$$A_L^\alpha = L(L+1)(2L+1) \left\{ \sum_{l_1 m_1} g_{l_1 l_2}^\alpha(L) f_{l_1 L l_2}^\alpha \right\}^{-1} \quad (\text{E.2})$$

Les coefficients $g_{l_1 l_2}^\alpha(L)$ sont donnés par :

$$g_{l_1 l_2}^\alpha(L) = \frac{C_{l_2}^{aa} C_{l_1}^{bb} f_{l_1 L l_2}^{\alpha*} - (-1)^{l_1+l_2+L} C_{l_1}^{ab} C_{l_2}^{ab} f_{l_2 L l_1}^{\alpha*}}{C_{l_1}^{aa} C_{l_2}^{aa} C_{l_1}^{bb} C_{l_2}^{bb} - (C_{l_1}^{ab} C_{l_2}^{ab})^2} \quad (\text{E.3})$$

Les poids $f_{l_1 L l_2}^{\alpha*}$ dépendent de la paire $\alpha = ab$ considérée. Ils sont donnés table E.1 pour les différents paires possibles. Ils sont fonction des facteurs ${}_{\pm s}F_{lLl'}$ dont l'expression fait intervenir les symboles 3j de Wigner :

$${}_{\pm s}F_{lLl'} = [L(L+1) + l'(l'+1) - l(l+1)] \sqrt{\frac{(2L+1)(2l+1)(2l'+1)}{16\pi}} \begin{pmatrix} l & L & l' \\ \pm s & 0 & \mp s \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

La variance de l'estimateur d_{LM}^α est donnée par :

$$d_{LM}^\alpha d_{LM'}^{\beta*} = \delta_{LL'} \delta_{MM'} (C_L^{dd} + N_L^{\alpha\beta}) \quad (\text{E.5})$$

α	$f_{l_1 L l_2}^{\alpha*}$
TT	$\tilde{C}_{l_1}^{TT}{}_0 F_{l_2 L l_1} + \tilde{C}_{l_2}^{TT}{}_0 F_{l_1 L l_2}$
TE	$\tilde{C}_{l_1}^{TE}{}_2 F_{l_2 L l_1} + \tilde{C}_{l_2}^{TE}{}_0 F_{l_1 L l_2}$ (pair)
EE	$\tilde{C}_{l_1}^{EE}{}_2 F_{l_2 L l_1} + \tilde{C}_{l_2}^{EE}{}_2 F_{l_1 L l_2}$ (pair)
TB	$i \tilde{C}_{l_1}^{TE}{}_2 F_{l_2 L l_1}$ (impair)
EB	$i \left[\tilde{C}_{l_1}^{EE}{}_2 F_{l_2 L l_1} - \tilde{C}_{l_2}^{BB}{}_2 F_{l_1 L l_2} \right]$ (impair)
BB	$\tilde{C}_{l_1}^{BB}{}_2 F_{l_2 L l_1} + \tilde{C}_{l_2}^{BB}{}_2 F_{l_1 L l_2}$ (pair)

TAB. E.1 – *Poids associés à l'estimation du champ de déflexion. Le terme pair (resp. impair) indique que seules les valeurs pour lesquelles la somme $l_1 + l_2 + L$ est paire (resp. impaire) ne sont pas nulles.*

avec

$$N_L^{\alpha\beta} = \frac{A_L^{\alpha*} A_L^\alpha}{L(L+1)(2L+1)} \sum_{l_1 l_2} \left\{ g_{l_1 l_2}^{\alpha*}(L) \left[C_{l_1}^{ac} C_{l_2}^{bd} g_{l_1 l_2}^\beta(L) + (-1)^{L+l_1+l_2} C_{l_1}^{ad} C_{l_2}^{bc} g_{l_2 l_1}^\beta(L) \right] \right\} \quad (\text{E.6})$$

avec $\alpha = ab$ et $\beta = cd$.

Les estimateurs quadratiques d_{LM}^α peuvent être combinés pour minimiser la variance du bruit N_l . Cet estimateur correspond à :

$$d_{LM}^{mv} = \sum_{\alpha} \omega^\alpha(L) d_{LM}^\alpha \quad (\text{E.7})$$

avec :

$$\omega^\alpha(L) = N_L^{mv} \sum_{\beta} (N_L^{-1})^{\alpha\beta} \quad (\text{E.8})$$

et

$$N_L^{mv} = \frac{1}{\sum_{\alpha\beta} (N_L^{-1})^{\alpha\beta}} \quad (\text{E.9})$$

Résumé

Les anisotropies du rayonnement fossile de l'Univers (CMB) constituent une des sources d'information les plus prometteuses sur la physique de l'Univers. C'est pourquoi de nombreuses expériences de mesure d'anisotropies se sont développées ces dernières années. Archeops est une expérience ballon de mesure des anisotropies du CMB, fruit d'une collaboration internationale pilotée par le Centre de Recherches sur les Très Basses Températures (CRTBT) du CNRS de Grenoble. Archeops est d'un point de vue technique le précurseur du futur satellite européen Planck.

Dans un premier temps, je rappelle les fondements théoriques du modèle standard de la cosmologie. Je présente ensuite les caractéristiques des expériences de mesure des anisotropies du CMB et notamment celles d'Archeops.

Dans un deuxième temps, j'expose mes contributions au sein de la collaboration Archeops. Mon travail comporte d'une part une partie instrumentale liée à la reconstruction du pointage, et d'autre part une partie d'analyse de données basée sur le développement d'algorithmes de destriage.

Pour finir, je discute de la nature des contraintes sur la masse des neutrinos qui seront susceptibles d'être obtenues avec les données de Planck.

Mots-clés: cosmologie, CMB, destriage, paramètres cosmologiques, neutrinos

Abstract

Cosmic microwave background (CMB) anisotropies are a powerful probe of the matter content and dynamic of the Universe. Thus an increasingly number of experiments have been developed since several years.

Archeops is a balloon-borne millimeter-wave telescope designed to measure CMB anisotropies over a wide range of angular scales. Archeops is an international collaboration lead by the Centre de Recherches sur les Très Basses Températures (CRTBT) of CNRS in Grenoble. Archeops is a testbed for the many technics of data analysis and optical design that are planned for ESA mission Planck.

In a first step, I give the theoretical basis of the standard model of cosmology. I recall the main properties of CMB anisotropies experiments and specially Archeops.

In a second step, my contributions to the Archeops collaboration are presented. The instrumental part of my work concerns pointing reconstruction. I participated to the data analysis pipeline through the development of destripping algorithms.

In a final part, I discuss the constraints on neutrino mass that can be achieved with Planck.

Keywords: cosmology, CMB, destripping, cosmological parameters, neutrinos

